МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тольяттинский государственный университет»

институт математики, физики и информационных технологий
кафедра «Алгебра и геометрия»

МЕТОДЫ АНАЛОГИИ И ОБОБЩЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЫ

М А Г И С Т Е Р С К А Я   Д И С С Е Р Т А Ц И Я

Направление подготовки магистра: 44.04.01 Педагогическое *образование*
Направленность (профиль): *Математическое образование*

Студент Д.С. Быкова __________

Научный
Руководитель: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

Руководитель программы: д.п.н., проф. Р.А. Утеева .....__________

«_____»_______ 2016 г.

Допустить к защите
Заведующий кафедрой: д.п.н., проф. Р.А. Утеева __________

«_____»__________2016 г.

Тольятти - 2016

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Согласно ФГОС среднего (полного) общего образования [75] метапредметные результаты освоения основной образовательной программы должны отражать: умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Аналогия – доступный прием рассуждения, но она больше убеждает, чем доказывает. Используют ее в том случае, если в дальнейшем утверждение по аналогии можно строго доказать.

Обобщение выступает как переход от данного множества предметов к рассмотрению более «емкого» множества, содержащего данное.

Методы аналогии и обобщения в школьном курсе математики могут быть использованы для решения задач, доказательства утверждений или теорем и введения новых понятий. Интерес для исследования представляет вопросы: *При изучении, каких тем авторами школьных учебников математики используются методы аналогии и обобщения? Какие типы или виды задач имеются в учебниках, решение которых опирается на методы аналогии и обобщения?*

Метод аналогии является одним из самых распространенных методов научного исследования. Использование метода аналогии дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как обеспечивает мысленный перенос к определенной системе знаний и умений от известного объекта к неизвестному. Роль метода аналогии в обучении математике отмечалась Дж. Пойа в книге «Математическое открытие» [56].

Метод обобщения позволяет устанавливать логические связи между понятиями, теоремами, отдельными темами учебного материала, развивает теоретическое мышление, формирует в сознании учащихся целостную картину учебного предмета. Метод обобщения является одним из самых важных средств самостоятельного расширения и углубления имеющихся знаний.

Анализ школьных учебников алгебры и геометрии А.Г. Мордковича [2, 4], Ю.Н. Макарычева [3], А.Н. Колмогорова [5], Н.Я. Виленкина [40], Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [1, 41, 42], А.В. Погорелова [57], Л.С. Атанасяна [18, 20], И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [69], В.В. Прасолова и И.Ф. Шарыгина [63] показал, что при введении новых понятий и доказательств теорем, а также при составлении системы задач к каждому параграфу, авторы не достаточно используют аналогию и обобщение, кроме Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [43,60], которые в своих учебниках в полной мере применяют данные методы.

Различные аспекты проблемы применения методов аналогии и обобщения в школьном курсе математики нашли отражение в диссертационных работах В.В. Кочагина (1999), Н.В. Горбачевой (2001), И.В. Ульяновой (2002), А.А. Аксенова (2010), Н.А. Юдиной (2011).

В.В. Кочагин [35] в диссертации подчеркивает, что обучение приему аналогии при изучении курса стереометрии в 10-11-х классах будет успешным, если выделить операции, входящие в этот прием, и обеспечить их поэтапное формирование с помощью специально разработанных блоков задач.

Н.В. Горбачева [23], на основе проведенного педагогического эксперимента, сделала следующие выводы: использование метода аналогии в обучении геометрии развивает такие показатели творческого мышления человека, как оригинальность, гибкость, беглость; между умением учащихся мыслить аналогиями (самостоятельно строить аналогии между математическими объектами: понятиями, аксиомами, теоремами, задачами) и уровнем развития творческого мышления существует статистически достоверная зависимость.

И.В. Ульянова [74] приводит в диссертации основные способы решения задач путем обобщения: а) выполнение исходного действия одновременно с обратным ему действием или противоположным ему, или аналогичным; б) усложнение условий выполнения исходного действия; в) добавление к исходному действию нового, опирающегося на уже достигнутый результат.

Н.А. Юдина [83] выделяет следующие этапы решения планиметрических задач: ознакомление учащихся с аналогией как методом научного познания, выявление особенностей умозаключений, сделанных по аналогии; применение учащимися различных видов аналогии для работы на заключительном этапе решения задачи по геометрии; организация осознанного применения учащимися метода аналогии на заключительном этапе решения планиметрических задач.

Таким образом, **актуальность** темы исследования обусловлена сложившимся к настоящему времени *противоречием* между необходимостью использования методов аналогии и обобщения в процессе обучения математике и отсутствием целенаправленной методики обучения решению задач на практике, обусловленной недостаточным вниманием авторов учебников к системам математических задач, ориентированным на использование этих методов.

Указанные противоречия позволили сформулировать **проблему диссертационного исследования:** какова роль методов аналогии и обобщения в обучении решению задач в курсе математики общеобразовательной школы?

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: методика обучения решению задач в курсе математики общеобразовательной школы на основе методов аналогии и обобщения.

Цель исследования заключается в разработке методики обучения решению задач в курсе математики общеобразовательной школы на основе методов аналогии и обобщения.

Гипотеза исследования основана на предположении о том, что если основу методики обучения решению задач в курсе математики общеобразовательной школы будет составлять система задач ориентированных на применение методов аналогии и обобщения, то это позволит повысить качество математических знаний и умений учащихся.

Задачи исследования:

1. Определить возможности и методические особенности методов аналогии и обобщения в обучении решению школьных математических задач.

2. Провести анализ учебников и учебных пособий по алгебре и геометрии на наличие задач, в решении которых используются методы аналогии и обобщения.

3. Выделить требования к системам задач, ориентированным на применение методов аналогии и обобщения.

4. Разработать системы задач на примере тем: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс) на основе выделенных требований.

5. Провести анкетирование учителей математики по проверке основных положений исследования.

6. Разработать программу элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» для учащихся старших классов.

Для решения поставленных задач применялись следующие **методы исследования:** анализ психолого-педагогической, научной и учебно-методической литературы; изучение, наблюдение и обобщение школьной практики; анализ собственного опыта работы в школе; анкетирование школьников, студентов и учителей; констатирующий и поисковый этапы эксперимента; систематизация и обобщение.

Основные этапы исследования:

9 семестр (2014/15 уч.г.): анализ ранее выполненных исследований по теме диссертации, анализ школьных и вузовских учебников, нормативных документов (стандартов, программ), анализ опыта работы школы по данной теме (на основе изучения научно-методической литературы и практики работы.

10 (А) семестр (2014/15 уч.г.): Определение теоретических и методических основ исследования по теме диссертации.

11(В) семестр (2015/16 уч.г.): Разработка систем задач, ориентированных на использование методов аналогии и обобщения.

12(С) семестр (2015/16 уч.г.): Оформление диссертации, корректировка ранее представленного материала, уточнение аппарата исследования, описание результатов экспериментальной работы, формулирование выводов.

Новизна проведенного исследования заключается в разработанных системах задач по темам: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс), элективном курсе «Взаимно-обратные задачи по математике», содержание которого ориентировано на формирование системы знаний и умений по решению задач с помощью методов аналогии и обобщения.

Теоретическая значимость исследования состоит в том, что в нем:

- определены возможности и методические особенности методов аналогии и обобщения в обучении решению школьных математических задач;

- проведен анализ учебников и учебных пособий по алгебре и геометрии на наличие задач, в решении которых используются методы аналогии и обобщения;

- сформулированы методические рекомендации ко внедрению систем задач, ориентированных на применение методов аналогии и обобщения.

Практическая значимость результатов исследования определяется тем, что в нем разработаны методическое обеспечение (целевой и содержательный компоненты) элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» (программа и материалы для занятий, тематика для исследовательской деятельности учащихся) и системы задач по темам: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс), которые могут быть использованы в практике работы учителей при реализации профильного обучения в старших классах.

Достоверность полученных результатов **и обоснованность** выводов, обусловлены использованием данных методической науки; анализом педагогической практики и опыта работы; систематизации и обобщения материала по теме исследования.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Системы задач по темам «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс), «Объемы многогранников» (XI класс) на основе выделенных требований.

2. Методические рекомендации по внедрению разработанных систем задач в процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

3. Содержание элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» и его методическое обеспечение (программа и 2 блока, содержащих теоретический и практический материал по решению взаимно-обратных задач по алгебре и геометрии).

Апробация результатов исследования осуществлена путём выступлений на: научно-методическом семинаре преподавателей, аспирантов и студентов кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ «Тольяттинский государственный университет» (декабрь 2014 г., июнь 2015 г., декабрь 2015 г., май 2016 г.); научной студенческой конференции «Дни науки в ТГУ» (апрель 2015 г., апрель 2016 г.); III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева) (27-29 ноября 2014 г.) [13]; VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура» (27-29 апреля 2015 г.) [14].

Экспериментальная проверка предлагаемой методики обучения решению задач на основе системы задач, решаемых с помощью методов аналогии и обобщения, проводилась в период педагогической и научно-исследовательской практик, а также в период работы учителем математики на базе МБУ «Школа № 34» г.о. Тольятти.

Основные результаты исследования отражены в 2 публикациях.

Структура диссертации: введение, две главы, заключение, список литературы.

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется его проблема, цель и гипотеза; определяются объект, предмет и задачи исследования; раскрывается научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы; излагаются положения, выносимые на защиту; приводится структура содержания диссертации.

В первой главе «Теоретические основы методов аналогии и обобщения при обучении математики в общеобразовательной школе» содержится 4 параграфа.

В первом параграфе уточняется понятия «аналогия», выявляется суть данного метода, представлены типичные ошибки, связанные с применением метода аналогии.

Во втором параграфе уточняется понятие «обобщение», выявляется суть метода обобщения, раскрывается метод обобщения как источник вспомогательных задач.

В третьем параграфе проводится сравнительный анализ учебников и учебных пособий по алгебре и геометрии на наличие тем с использованием методов аналогии и обобщения.

В четвертом параграфе уточняется понятие «система задач», выделяются основные принципы построения системы задач в школьном курсе математики.

Во второй главе «Методические основы методов аналогии и обобщения при обучении решению задач в курсе математики старших классов» содержится 3 параграфа.

В пятом параграфе представлены системы задач на применение методов аналогии и обобщения при изучении тем: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс).

В шестом параграфе приведен анализ практического опыта учителей на применение аналогии и обобщения при решении задач, отраженный в научно-методической литературе, результатов анкетирования учителей математики, приводятся рекомендации для учителей математики по внедрению разработанных систем задач по темам: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс) в процесс обучения математике.

В седьмом параграфе представлена программа элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике», содержание которого основано на применении методов аналогии и обобщения. Обоснована его актуальность, цель и задачи. Составлено тематическое планирование на 34 учебных часа, описаны отличительные особенности данного элективного курса, ожидаемые результаты и основные формы подведения итогов; предлагается содержание элективного курса и темы для исследовательской работы учащихся.

В заключении приведены основные выводы и результаты проведенного исследования.

Список литературы содержит 84 наименования.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДОВ АНАЛОГИИ И ОБОБЩЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ШКОЛЕ

§1. Метод аналогии в школьном курсе математики

1.1. Понятие аналогии

В книге «Математика в понятиях, терминах и определениях. Ч. 1» [44] дается следующее определение аналогии: аналогия - подобие, сходство предметов или явлений в каких-либо свойствах, признаках, отношениях, причем сами эти предметы различны. Аналогия - доступный прием рассуждения, но она больше убеждает, чем доказывает. Используют ее в том случае, если в дальнейшем утверждение по аналогии можно строго доказать.

Дж. Пойа в книге «Математика и правдоподобные рассуждения» [55, С.35] рассуждает о том, что аналогия есть некоторого рода сходство. Различие между аналогией и другими видами сходства заключается в намерениях думающего. Сходные предметы согласуются между собой в каком-то отношении.

В книге «Математическое открытие» [56] Дж. Пойа пишет, что аналогия является обильным источником новых фактов. В простейших случаях можно почти копировать решение подобной задачи. Аналогия только указывает направление, в котором следует продолжать работу.

И еще одно высказывание об аналогии: «Аналогия – умозаключение, в котором заключение относится к другому предмету, чем тот, о котором говорится в посылке» [73, С.19].

Имеет смысл говорить о «полезной» и о «вредной» аналогии, которые выделяет Ю.М. Колягин. Примером «полезной аналогии» является, в частности, мысленный перенос многих понятий и суждений, относящихся к целым числам на множество рациональных чисел. Например, при сравнении двух рациональных чисел используется тот же алгоритм, что и для сравнения целых чисел. Примером «вредной» аналогии является ошибочная формулировка признака делимости числа на 27 по аналогии с известными признаками делимости на 3 и 9. Далее приводится пример «вредной» аналогии, которую могут провести учащиеся VII класса на уроке изучения текстовых задач, взятый из книги В.А. Оганесяна и др. «Методика преподавания математики в средней школе» [48, С.111].

Учитель спрашивает школьника:

– Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить в 2 раза, а боковую сторону уменьшить также в 2 раза?

– Площадь не изменится.

– Правильно. А если основание прямоугольника увеличить на 20%, а боковую сторону уменьшить на 20%, изменится ли его площадь?

– Нет, не изменится.

Последний ответ учащегося уже неверен. Обозначив основание прямоугольника через a, а боковую сторону через b, имеем: $S = a \cdot b$.

В соответствии с условием основание измененного прямоугольника $a_1 = a + 0{,}2a$ и боковая сторона $b_1 = b - 0{,}2b$.

Тогда

$$S_1 = a_1 \cdot b_1 = a\,(1 + 0{,}2) \cdot b(1 - 0{,}2) = ab - 0{,}04ab.$$

Площадь прямоугольника уменьшится в этом случае на 4%.

Имеется немало примеров того, как некоторые предположения, выведенные учеными методом аналогии, впоследствии оказывались неверными. Так предположение французского математика Ферма (1601-1665) о том, что все числа вида $2^{2^n} + 1$ будут простыми, оказалось неверным. Ферма высказал это предположение, вычислив значения $2^{2^n} + 1$ лишь для n = 1, 2, 3, 4, когда числа действительно получаются простые:

$$2^{2^1} + 1 = 5;\ 2^{2^2} + 1 = 17;\ 2^{2^3} + 1 = 257;\ 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

Несмотря на ошибочность данного суждения, числа вида $2^{2^n}+1$ стали называть числами Ферма [81, С.22]. Швейцарский математик Эйлер (1707-1783) обнаружил, что следующее число – уже составное:

$$2^{2^5}+1=416\,700\,417.$$

Данное «умозаключение по аналогии», будучи неправильным, послужило все же толчком к получению нового научного результата: среди чисел вида $2^{2^n}+1$ содержатся как простые, так и составные числа. Последний факт стал известен лишь после проверки предположения Ферма, предпринятой Эйлером [80, С.12]. Метод аналогии может служить стимулом для исследований и в том случае, когда соответствующее обобщение оказывается даже ложным.

1.2. Суть метода аналогии

Рассмотрим понятие метода в общем случае. В книге «История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник» [8] дается следующее определение метода: метод – греческое μέθοδος означает буквально «дорога вослед за чем-либо», оно составлено из μετά и όδός (дорога, путь). Платон и Аристотель стали употреблять это слово как название совокупности математических процедур, операций, необходимых для построения или получения результата.

В книге «Математика в понятиях, терминах и определениях. Ч. 1» дается следующее определение умозаключения по аналогии: умозаключение по аналогии – это попытка получить новые знания об изученных свойствах, признаках, отношениях данных предметов на основе знаний об их частичном сходстве [44, С.27].

В БСЭ [16] дается следующее определение умозаключения по аналогии: при умозаключении по аналогии знание, полученное из рассмотрения какого-либо объекта («модели»), переносится на другой, менее изученный в каком-либо смысле объект. По отношению к конкретным объектам заключения, получаемые по аналогии, являются источниками научных гипотез, индуктивных рассуждений и играют важную роль в научных открытиях.

Исходя из определений метода и умозаключения по аналогии, можно отождествить метод аналогии и умозаключение по аналогии.

Простое применение метода аналогии дает упражнение, подобное исходному. От него следует отличать составление задачи методом обобщения, когда новая задача оказывается в том или ином отношении сложнее исходной. Метод аналогии основывается на применении аналогии, но не сводится полностью к ней.

Как считает Ю.М. Колягин, не менее полезно воспитывать у школьников привычку сознательно использовать метод аналогии при поиске способов решения предложенной им трудной задачи. В этом случае рекомендуется следующий общий *план работы над задачей* [48, С.112]:

1. Подобрать задачу, аналогичную данной, то есть такую, у которой имелись бы сходные условия и сходное заключение с данной задачей. Вспомогательная задача должна быть проще данной или такой, решение которой известно.

2. Решить вспомогательную задачу. Затем провести аналогичные рассуждения при решении данной задачи.

Например, учащимся VII класса при изучении выражений с переменными можно рассмотреть следующую задачу: Найдите сумму дробей $\frac{2a}{7b}$ и $\frac{5c}{14d}$.

Одновременно дать решить вспомогательную задачу: Найдите сумму дробей $\frac{4}{105}$ и $\frac{31}{147}$.

Используя метод аналогии, учащиеся с легкостью решат поставленную задачу.

Можно предложить учащимся VIII класса найти числовые аналогии египетского треугольника $3^2 + 4^2 = 5^2$. Пусть, например, речь идет о составлении формулы, позволяющей находить тройки всевозможных пифагоровых чисел [81, С.25].

Исходя из равенств:

$$x = a^2 - b^2;\ y = 2ab;\ z = a^2 + b^2,$$

получены пифагоровы числа:

$$z^2 = x^2 + y^2.$$

Тут же возникает вопрос: удастся ли найти аналогичную формулу для n чисел? Ответ оказывается положительным – верна формула:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)^2 = (a_1^2 - a_2^2 - \cdots - a_n^2)^2 + (2a_1a_2)^2 + (2a_1a_3)^2 + \\ + \cdots + (2a_1a_n)^2.$$

К аналогии с планиметрическими задачами полезно обращаться при решении стереометрических задач, как считает Ю.М. Колягин.

Пусть дана **задача**: На сколько частей могут разделить пространство четыре произвольно расположенные плоскости?

Четыре плоскости определяют тетраэдр, который напоминает три пересекающиеся прямые на плоскости. При этом возникает вспомогательная задача, аналогичная данной: «На сколько частей могут разделить плоскость три произвольные прямые?».

Сначала необходимо решить вспомогательную задачу (рис. 1).

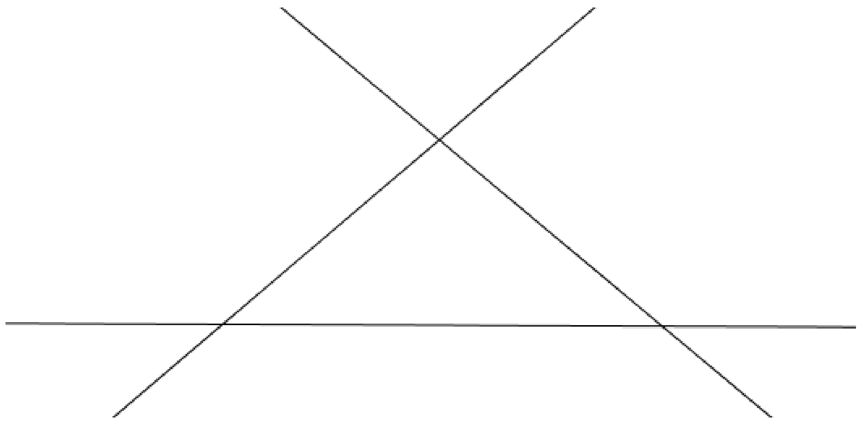

Рис. 1

В общем случае три прямые могут разделить плоскость на семь частей, одна из них ограничена (внутренняя область треугольника), а другие, неограниченные части плоскости (таких шесть) имеют с внутренней областью общую границу по стороне треугольника или по продолжению его сторон. В этом случае плоскость оказывается разделенной всего на

$$1 + 3 + 3 = 7 \text{ частей.}$$

Затем решить основную задачу (рис. 2).

В общем случае, четыре плоскости могут разделить пространство на следующие части: одна из них ограничена – внутренняя область тетраэдра; неограниченные части пространства имеют общую границу с внутренней областью по грани тетраэдра (четыре части), или по его ребру (шесть частей), или по плоскостям, проходящим через его вершины (еще четыре части). В этом случае пространство оказывается разделенным всего на

1 + 4 + 6 + 4 = 15 частей [48, С.113].

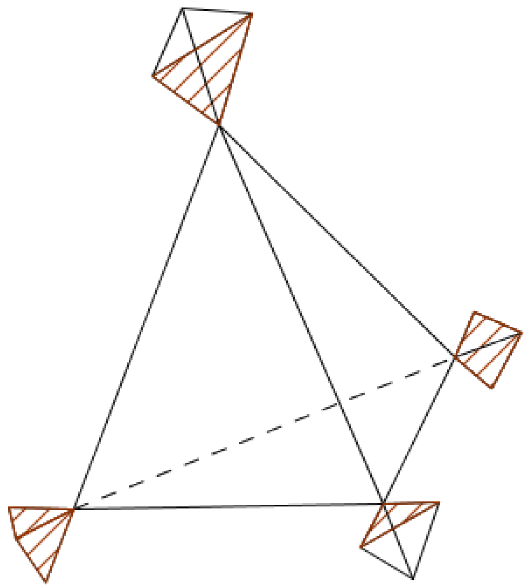

Рис. 2

Можно проводить аналогию между планиметрическими фигурами и стереометрическими и соответствующими им теоремами. Так в статьях «Аналог теоремы Пифагора в стереометрии» [29, С.72] и «Изучаем пространственную теорему Пифагора» [38, С.74] из журнала «Математика в школе» проводится аналогия между прямоугольным треугольником и треугольной пирамидой. Как известно, в школьной геометрии рассматривается большое количество теорем и формул для прямоугольного треугольника, основа которых – теорема Пифагора. Авторы данных статьей считают, что теорема Пифагора будет справедлива и для прямоугольной пирамиды, если вместо длин катетов взять площади трех граней с прямыми углами, а вместо длины гипотенузы – площадь оставшейся грани, четвертой.

Приведем несколько теорем и формул, аналогичных и для прямоугольной пирамиды, взятых из указанных статей.

Формула 1. Пусть дан в пространстве произвольный треугольник *ABC*, ортогонально спроектированный на плоскость β, проходящую через одну из его сторон, например сторону *AB*. Пусть угол между плоскостями *ABC* и β равен φ (рис. 3). Тогда нетрудно доказать, что

$$S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABC} \cos\varphi.$$

Данная формула позволяет определить тригонометрические функции двугранного угла, не сводя их к тригонометрическим функциям плоского угла. Эта формула приводит к мысли, что прямоугольный треугольник аналогичен пирамиде.

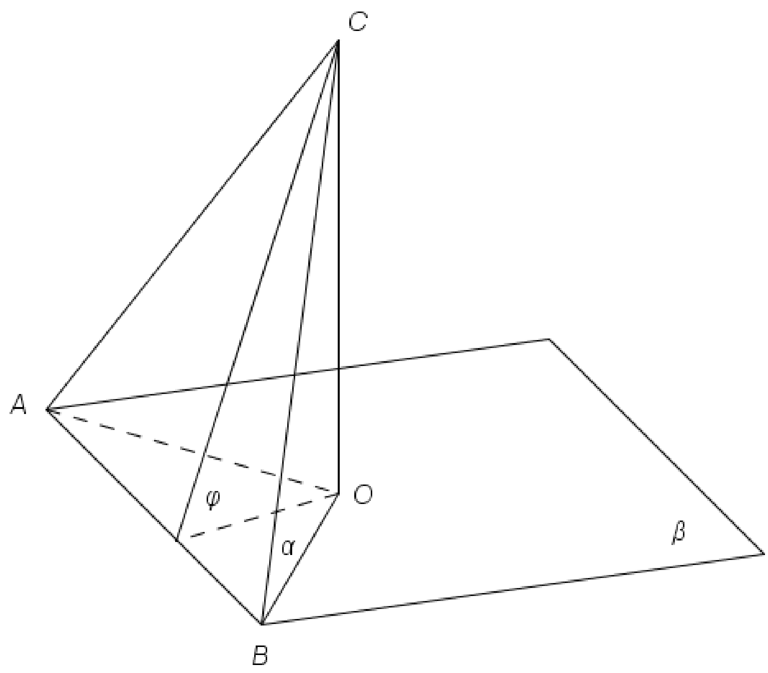

Рис. 3

Формула 2. Если в прямоугольном треугольнике *ABC* к гипотенузе поведена высота $CD = h$, делящая ее на отрезки x и y, то $h^2 = xy$.

В прямоугольной пирамиде (рис. 4) аналог высоты – это треугольник *COH* (*CH* ⊥ *AB*).

Делаются следующие обозначения:

$$S_{\Delta COH} = H;\ S_{\Delta CAH} = X;\ S_{\Delta CBH} = Y.$$

Тогда

$$H^2 = \frac{1}{4} OH^2 \cdot OC^2.$$

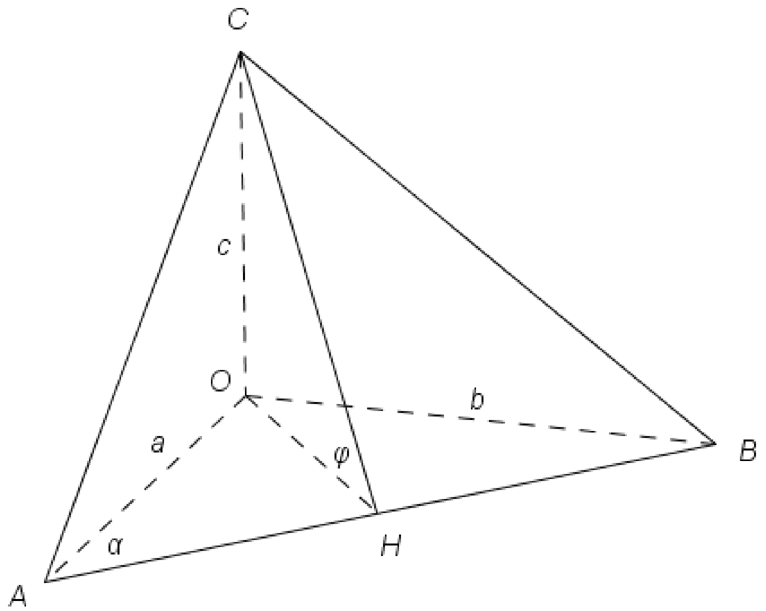

Рис. 4

Делается замена OH^2 на произведение *AH* и *HB*, а OC^2 – на $\sin^2\varphi \cdot CH^2$ и затем:

$$H^2 = \frac{1}{2} AH \cdot CH \cdot \frac{1}{2} HB \cdot CH \cdot \sin^2\varphi.$$

В результате выражение принимает вид:

$$H^2 = X \cdot Y \cdot \sin^2\varphi.$$

Формула 3. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то есть

$$S = \frac{1}{2} ab.$$

Используя метод аналогии, выражается объем прямоугольной пирамиды через произведение площадей ее катетов.

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{ab}{2}c=\frac{1}{6}abc=\frac{1}{6}\sqrt{a^2b^2c^2}=\frac{2\sqrt{2}}{6}\sqrt{\frac{ab}{2}\cdot\frac{bc}{2}\cdot\frac{ac}{2}},$$

$$V=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{S_{\Delta AOB}S_{\Delta BOC}S_{\Delta AOC}}.$$

Теорема 1. В стереометрии известен аналог теоремы Пифагора для прямоугольного параллелепипеда:

$$d^2=a^2+b^2+c^2,$$

где d – диагональ параллелепипеда, а a, b, c – величины трех его измерений.

В прямоугольной пирамиде $OABC$ $AO=a$, $BO=b$, $CO=c$. Используя метод аналогии, получается следующее равенство:

$$S_{\Delta CAB}^2=S_{\Delta COA}^2+S_{\Delta COB}^2+S_{\Delta AOB}^2.$$

Подставив в эту формулу полученное ранее равенство, выводится следующее:

$$S_{\Delta AOB}^2\cdot\mathrm{tg}^2\varphi=S_{\Delta COA}^2+S_{\Delta COB}^2.$$

В прямоугольном треугольнике COH

$$\mathrm{tg}\varphi=\frac{CO}{OH},$$

по условию $CO=c$, а OH находится из треугольников AOB и AHO.

В одном

$$\sin\alpha=\frac{OB}{AB},$$

а в другом

$$\sin\alpha=\frac{OH}{AO}.$$

Так получается равенство

$$\frac{OB}{AB}=\frac{OH}{AO},$$

откуда

$$OH=\frac{OB\cdot AO}{AB}.$$

В прямоугольном треугольнике *AOB*

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В результате

$$OH = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{а } \mathrm{tg}\varphi = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}.$$

Площади прямоугольных треугольников *AOB*, *COA* и *COB* равны соответственно

$$\frac{ab}{2}, \frac{ac}{2} \text{ и } \frac{bc}{2}.$$

В результате полученная ранее формула приобретает вид

$$\frac{a^2b^2}{4} \cdot \frac{c^2(a^2 + b^2)}{a^2b^2} = \frac{a^2c^2}{4} + \frac{b^2c^2}{4},$$

преобразовав ее, получим

$$c^2(a^2 + b^2) = c^2(a^2 + b^2).$$

Последнее выражение является верным равенством, поэтому можно сделать вывод: первоначальное предположение было верным и верна следующая **теорема:**

В прямоугольной пирамиде квадрат площади гипотенузы равен сумме квадратов площадей катетов.

Теорема 2. Используя метод аналогии, выводится теорема косинусов для прямоугольной пирамиды: в прямоугольной пирамиде *OABC* выполняется равенство (рис. 4)

$$S_{\Delta AOC}^2 + S_{\Delta BOC}^2 = S_{\Delta ABC}^2 + S_{\Delta AOB}^2 - 2S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta AOB} \cos\varphi,$$

где φ – это двугранный угол между гранями *ABC* и *AOB*.

1.3. Типичные ошибки, связанные с применением метода аналогии

Полезно знать о типичных ошибках, которые порождены неявным применением аналогии, как считает Ю.М. Колягин. Ниже приводятся примеры *типичных ошибок*, возникающих в процессе обучения, взятых из книг «Методика преподавания математики в восьмилетней школе» [47] и «Методика преподавания математики в средней школе» [48].

Ошибка 1. Наличие общности в свойствах сложения и умножения чисел иногда приводит к возникновению у школьников ошибочной аналогии о сходстве этих действий и в других свойствах. Так, например, при решении упражнения вида $\frac{a+b}{c+b}$ по ложной аналогии с сокращением на общий множитель учащиеся «сокращают» это выражение на слагаемое:

$$\frac{a+b}{a+b}=\frac{a}{c}.$$

Ошибка 2. К тому же виду ошибок принадлежит и весьма распространенная ошибка

$$\log_c(a+b)=\log_c a+\log_c b\,,$$

порожденная ложной аналогией с верным равенством

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b\,,$$

где $a > 0$, $b > 0$.

Ошибка 3. Нередкая ошибка вида:

$$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$$

также является результатом ложной аналогии со способом извлечения квадратного корня из произведения

$$\sqrt{a^2b^2}=|ab|.$$

Ошибка 4. Очень распространенная ошибка, приводимая психологом Н.А. Менчинской [48, С.114]:

Учащиеся при решении примера 96 : 16 = 10 допускают ошибку, в основе которой лежит ошибочное умозаключение по аналогии

96 : 16 = 10(?),

потому что

$$90 : 10 = 9 \text{ и } 6 : 6 = 1; 9 + 1 = 10.$$

В приведенном примере приемы, относящиеся к операциям сложения и вычитания чисел, переносятся на операцию деления. Это ошибочное умозаключение возникло из привычного оперирования в отдельности десятками и единицами при сложении и вычитании чисел и делении их на однозначное число.

Ошибка 5. Ошибки возникают и с применением переместительного закона сложения и умножения, со многими свойствами уравнения и неравенства.

Например: если

$$a \cdot 5 = b \cdot 5, \text{ то } a=b,$$

учащиеся считают, что если

$$a \cdot 0 = b \cdot 0, \text{ то } a=b,$$

или зная, что

$$\frac{3 \cdot 2}{8} > \frac{3}{8},$$

ученики иногда полагают, что

$$\frac{a \cdot b}{c} > \frac{a}{c}.$$

Ошибка 6. Замечая частые аналогии между многими понятиями и предложениями планиметрии и стереометрии, учащиеся часто переносят их в ситуации, где они оказываются ложными. Например: «Через данную на прямой точку в пространстве можно провести только один перпендикуляр к этой прямой», или «Две прямые в пространстве, перпендикулярные к одной и той же третьей прямой, всегда параллельны между собой», или «Две плоскости, перпендикулярные к одной и той же третьей плоскости, всегда параллельны между собой» и так далее.

Встречается много *логических ошибок* в преобразованиях алгебраических выражений, когда ученики пользуются необоснованной аналогией, как пишет А.А. Столяр [46, С.78].

Известны распространенные ошибки такого вида:

1. Так как

$$(a+b)c=ac+bc,$$

то по аналогии

$$(ab)c=ac\cdot bc;$$

2. Известно, что если

$$a=b, \text{ то } ak=bk,$$

отсюда по аналогии считают, что, если

$$a > b, \text{ то } ak > bk$$

в любом случае;

3. По аналогии с численными дробями ученик иногда считает, что

$$\frac{a+b}{c} > \frac{a}{c}.$$

Предупредить эти ошибки или искоренить их можно постоянным напоминанием школьникам (при этом не только словами, но и соответствующими примерами), что метод аналогии может служить только вспомогательным средством для установления истины и постоянно требует проверки и подтверждения логическим доказательством.

§2. Метод обобщения в школьном курсе математики

2.1. Понятие обобщения

В книге «Методика преподавания математики в средней школе» [48] дается следующее определение обобщения: обобщение выступает как переход от данного множества предметов к рассмотрению более «емкого» множества, содержащего данное.

В БСЭ [16] обобщение определяется как форма приращения знания путём мысленного перехода от частного к общему, которой обычно соответствует и переход на более высокую ступень абстракции.

Математик У. Сойер в книге «Прелюдия к математике» пишет о том, что обобщение – один из самых важных факторов развития математики [70, С.19].

Дж. Пойа в книге «Математика и правдоподобные рассуждения» дает следующее определение обобщения: обобщение есть переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, содержащего данное [55, С.34]. Например, используя обобщение, переходим от рассмотрения треугольников к рассмотрению многоугольников с произвольным числом сторон, когда переходим от изучения тригонометрических функций острого угла к изучению тригонометрических функций произвольного угла.

К обобщению могут привести:

а) замена некоторой постоянной объекта переменной (квадратичная функция → степенная функция с натуральным показателем);

б) отказ от ограничения, наложенного на объект изучения $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – множество действительных чисел) [48, С.56].

2.2. Суть метода обобщения

Результаты действий (как практических, так и мыслительных) над какими-либо объектами обычно определяются взаимным соотношением этих объектов и их свойств. Действия служат средством для проведения анализа, с помощью которого эти соотношения устанавливаются. Затем, когда соотношения установлены, используется метод обобщения, как считает Ю.М. Колягин.

В книге «Укрупнение дидактических единиц в обучении математике» [82] П.М. Эрдниев и Б.П. Эрдниев пишут, что после решения задачи можно найти предмет размышлениям, найти несколько направлений, в которых удается развить и обобщить задачу, затем найти решения созданных проблем.

На одном из занятий, по мнению Ю.М. Колягина, учащимся может быть предложена некоторая задача. Наряду с основной задачей учащимся предлагается и вспомогательная задача, менее трудная и вместе с тем такая, что ее решение и решение основной задачи было основано на одном и том же принципе. После решения вспомогательной задачи и основная задача может быстро решиться учащимися, которые сумеют осуществить мысленный «перенос» хода решения вспомогательной задачи на решение основной. Достаточно выделить общее звено решения двух данных задач в качестве общего свойства, то есть совершить обобщение.

Возможность метода обобщения и использования его результата – переноса – в процессе решения этих задач, по мнению Ю.М. Колягина, зависят от мыслительного включения обеих задач в единый процесс аналитико-синтетической деятельности. Успешное использование метода обобщения (и переноса) обусловливается тем, что на отдельных этапах учащиеся могут соотнести условие основной задачи и задачи-подсказки [48, С.57].

Результат метода обобщения (перенос, использование задачи-подсказки) зависит от работы, проведенной учащимися в процессе анализа условия основной задачи.

В.В. Давыдов считает, что в области преподавания математики использование метода обобщения находит отражение в том привычном порядке, в котором изучаются арифметика и алгебра. Алгебра в этом случае служит обобщением арифметики. Разницу между арифметикой и алгеброй можно видеть в том, что в арифметике, оперируя с числами-цифрами, мыслят частные эмпирические числа, в алгебре же, оперируя с буквами, подразумевают под ними любые числа данного рода [27, С.24].

2.3. Метод обобщения как источник вспомогательных задач

П.М. Эрдниев в книге «Укрупнение дидактических единиц в обучении математике» [82] приводит следующий экспериментальный пример: Когда шестиклассникам было предложено записать выражение $6x^2$ в виде произведения двух множителей, то большинство учащихся ограничилось тривиальными ответами:

$$2x \cdot 3x; 6x^2 \cdot 1; 6 \cdot x^2;$$

некоторые учащиеся, отличающиеся от своих сверстников комбинаторскими способностями, придумали разложения:

$$12x^2 \cdot \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \cdot 8x^2;$$

только один использовал буквенные показатели:

$$\frac{1}{12}x^k \cdot 72x^{2-k};$$

и никто не дал общей формулы разложения хотя бы в виде:

$$6x^2 = \left(\frac{6}{n}x^{2-k}\right) \cdot (nx^k).$$

На этом примере видно, какой широкий диапазон комбинаций открывается перед учащимися, когда они получают задания по синтезу тех или иных выражений.

Метод обобщения можно использовать при решении различных задач из курса алгебры и геометрии, получая при этом различные обобщения.

Обобщение 1. Пусть учащиеся V класса ознакомились с приемом устного умножения на 11: Чтобы умножить число на 11, надо приписать к нему нуль и затем сложить его с первоначальным числом

$$(34 \cdot 11 = 340 + 34 = 374).$$

Учитель может направить мысль учащихся на обобщение этого правила для случаев умножения на 101, 1001 и т. д. Обобщенные правила могут сформулировать сами учащиеся.

Обобщение 2. Пусть учащимся VII классов необходимо решить следующую задачу [56, С.48]: У фермера имеются куры и кролики. Всего у этих кур и кроликов 50 голов и 140 ног. Сколько кур и сколько кроликов имеет фермер?

Пусть x – количество кур, а y – количество кроликов, тогда

$x + y$=50, $2x + 4y$=140.

Пусть теперь h обозначает число голов, а f число ног животных, принадлежащих фермеру.

После такой замены задача приобретает вид:

Количество кур	x
Количество кроликов	y
Все животные имеют голов	$x + y=h$
Все животные имеют ног	$2x + 4y=f$

Полученную систему двух уравнений можно переписать так:

$$\begin{cases} x + 2y = \dfrac{f}{2}, \\ x + y = h; \end{cases}$$

вычитая второе уравнение из первого, получено:

$$y = \frac{f}{2} - h.$$

Данная задача методом обобщения свелась к тому, что возможно при любом заданном числе ног и голов найти количество животных на ферме.

Обобщение 3. Пусть учащиеся VII класса доказали неравенство [82, С.64]:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca},$$

где a, b, c – положительные числа.

Учитель далее ставит проблему: обобщить доказанное неравенство на 4, 5, …, n членов.

Для решения данной задачи учащиеся должны сделать следующее предположение, которое аналогично доказанному ранее неравенству:

$$a + b + c + d \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}.$$

Доказательство строится аналогично:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \qquad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \qquad c + d \geq 2\sqrt{cd}, \qquad d + a \geq 2\sqrt{da}.$$

Складывая левые и правые части отдельно, получается обобщенное неравенство, являющееся плодом творчества самих учащихся. Более смышленые из них могут пойти дальше, обобщив неравенства на n членов:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \cdots + \sqrt{a_n a_1}.$$

Обобщение 4. На факультативе в VII классе при ознакомлении учащихся с числами, называемыми обращенными квадратами (например, 12^2=144, 21^2=441), можно привести ряд обобщений, взятых из статьи И.И. Михайлова «Обращенные квадраты» в журнале «Математика в школе» [49, С.71].

Рассмотрим числа $1\underbrace{0\ldots0}_{n}2$ (n – натуральное).

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}2^2 = (10^{n+1} + 2)^2 = 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 4 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}4\underbrace{0\ldots0}_{n}4.$$

Квадрат же обращенного числа $2\underbrace{0..0}_{n}1$ равен

$$2\underbrace{0\ldots0}_{n}1^2 = (2 \cdot 10^{n+1} + 1)^2 = 4 \cdot 10^{2n+2} + 4 \cdot 10^{n+1} + 1 = 4\underbrace{0\ldots0}_{n}4\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Аналогично

$$1\underbrace{0\ldots0}_{n}3^2 = (10^{n+1} + 3)^2 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n}6\underbrace{0\ldots0}_{n}9 \text{ и}$$

$$3\underbrace{0\ldots0}_{n}1^2 = (3 \cdot 10^{n+1} + 1)^2 = 9\underbrace{0\ldots0}_{n}6\underbrace{0\ldots0}_{n}1.$$

Обобщение 5. На элективных курсах учащимся IX классов можно предложить доказать теорему, являющуюся обобщением неравенства Чебышева, взятую из книги «Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения» [22, С.157].

Теорема.

Для любых двух одинаково упорядоченных конечных последовательностей (a_k) и (b_k) (k = 1, 2, …, n; $n \in \mathbb{N}$) справедливо равенство

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n}{n},$$

то есть

$$A(a_1, \ldots, a_n) \cdot A(b_1, \ldots, b_n) \leq A(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n),$$

причем равенство в этом соотношении имеет место тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ или $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$.

Обобщение 6. На уроках геометрии в IX классе на факультативе можно рассмотреть ряд обобщений, связанных с расстоянием (l_i) произвольной точки на окружности (радиусом R) до концов диаметра ($l_1^2 + l_2^2 = 4R^2$), взятых из статьи Ю.И. Бабенко «Степенные отношения в окружности» из журнала «Математика в школе» [10, С.65-66].

1) Если в окружность вписан правильный многоугольник с четным числом сторон $2n$ (n = 1, 2, 3, …), то сумма $2n$-*х* степеней расстояний от произвольной точки на окружности до вершин многоугольника не зависит от положения точки, причем

$$\sum_{i=1}^{2n} l_i^{2n} = \frac{2n(2n)!}{(n!)^2} R^{2n}.$$

2) Для вписанного правильного многоугольника с нечетным числом сторон $2n$+1 постоянна сумма расстояний от произвольной точки окружности до вершин в степени $2n$ + 2, $2n$, $2n$ – 2 … 2.

Обобщение 7. На уроках геометрии учащиеся могут, используя метод обобщения, получить новые соотношения, а затем доказывать их.

Например, от соотношения

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r},$$

верного для треугольника, учащийся XI класса может перейти к соотношению

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r},$$

верному для тетраэдра (h_1, h_2, h_3, h_4 – соответственно высоты треугольника и тетраэдра, r – радиус вписанной окружности, сферы) и так далее.

Доказательства соотношения для треугольника (рис. 5) приводится в книге «Методика преподавания математики в восьмилетней школе» С.Е. Ляпина [47, С.65]:

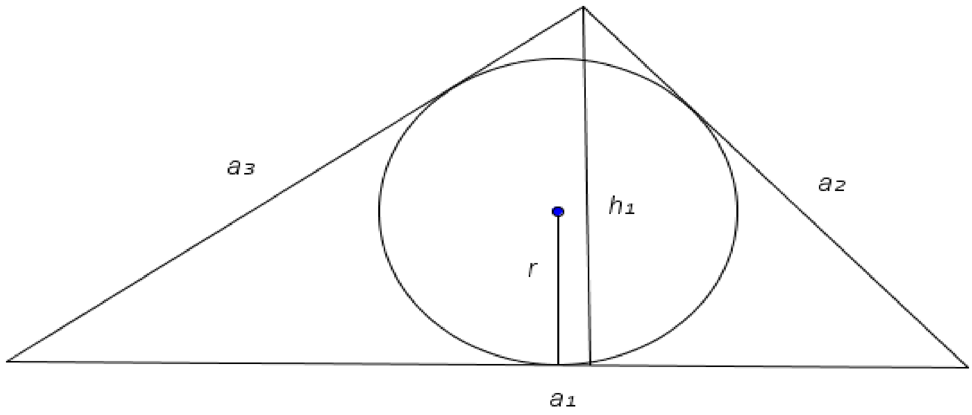

Рис. 5

$$\begin{array}{l|l} a_1 \cdot h_1 = 2S & \dfrac{a_1}{2S} = \dfrac{1}{h_1} \\ a_2 \cdot h_2 = 2S & \dfrac{a_2}{2S} = \dfrac{1}{h_2} \\ a_3 \cdot h_3 = 2S & \dfrac{a_3}{2S} = \dfrac{1}{h_3} \end{array}$$

Далее складываются три равенства почленно:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2S} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}. \quad (1)$$

Площадь треугольника выражается через его полупериметр и радиус вписанной окружности:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2} \cdot r = S,$$

откуда

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{2S} = \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Приравнивая правые части (1) и (2), получено доказываемое соотношение:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}.$$

Аналогичным образом доказывается соотношения для тетраэдра.

Обобщение 8. Пусть учащимся IX класса дано следующее утверждение: Если дан многоугольник, то векторы, образованные его сторонами (и направленные последовательно), дают в сумме нуль-вектор. На его основе можно получить серию обобщенных задач, взятых из книги П.М.

Эрдниева и Б.П. Эрдниева «Укрупнение дидактических единиц в обучении математике» [82, С.73].

1) Из медиан треугольника можно построить треугольник (рис. 6).

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – векторы, образованные на сторонах данного треугольника, а $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ – векторы, образованные на соответствующих медианах данного треугольника.

Тогда:

$$\overrightarrow{AA_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}, \overrightarrow{BB_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{CC_1} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Далее складываются три равенства почленно:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \frac{3}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{3}{2} \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

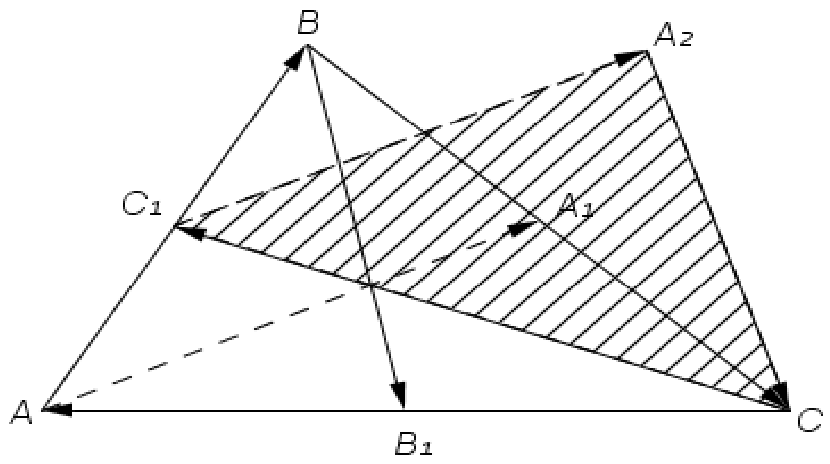

Рис. 6

2) От каждой вершины треугольника отложим на стороне или на ее продолжении последовательно третью (четвертую, десятую, …, n-ю) часть этой стороны. Концы отрезков обозначим буквами A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}.$$

3) Обобщить предыдущую задачу на плоский пятиугольник, соединяя вершины с соответствующими точками через одну вершину (рис. 7) (затем через две вершины).

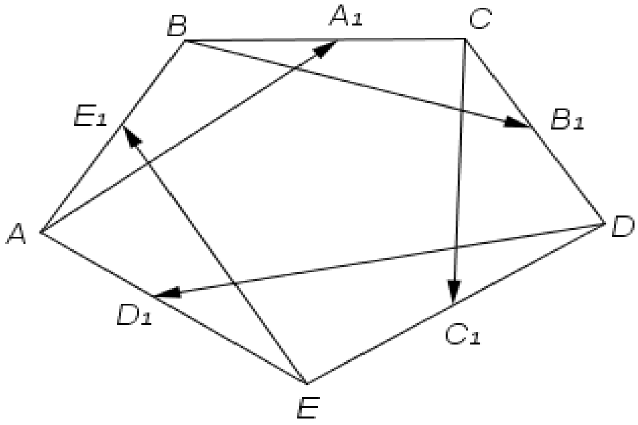

Рис. 7

4) Обобщить задачу на произвольный пространственный многоугольник.

Решая данные задачи, учащиеся смогут самостоятельно обобщить заданное утверждение на случай пространства.

§3. Анализ учебных пособий по алгебре и геометрии

3.1. Анализ пособий по алгебре X-XI классов

Анализ учебных пособий *по алгебре за X класс* проводился на наличие тем, в которых для введения новых понятий или доказательств утверждений использовались методы аналогии и обобщения, применяемые в дальнейшем при решении задач или в качестве заданий для обучающихся.

Анализ пособия М.И. Шабунина [76] показал, что:

1) свойства операций над множествами аналогичны свойствам операций над высказываниями;

2) аналогия проводится между парами «действительные числа – координатная прямая» и «комплексные числа – координатная плоскость»;

3) понятия, связанные с делимостью многочленов и алгоритмом Евклида аналогичны соответствующим понятиям и методам для натуральных чисел;

4) дается обобщенная теорема Виета;

5) используя метод обобщения, выводится формула общего члена числовой последовательности;

6) метод аналогии используется для введения понятия «предел функции»: проводится аналогия с понятием «предел последовательности»;

7) правила выполнения арифметических операций над пределами функций в точке аналогичны для пределов числовых последовательностей и пределов функции на бесконечности.

Проанализировав учебное пособие А.Г. Мордковича и П.В. Семенова [50] получаем следующие выводы:

1) используя метод обобщения, выводится доказательство признака делимости числа на 11;

2) аналогия проводится между парами «действительные числа – координатная прямая» и «комплексные числа – координатная плоскость»;

3) используя метод обобщения, вводится понятия числа сочетаний.

Рассмотрение учебного пособия Т.Л. Афанасьевой и Л.А. Тапилиной [7] привело лишь к одному случаю: используя метод обобщения, выводится понятие непрерывности функции на промежутке: непрерывность функции в точке обобщается на случай промежутка; выводится формула для нахождения приближенного значения дифференцируемой в точке x_0 функции $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$.

Исследование учебных пособий *по алгебре за XI класс* проводилось на наличие тем, в которых для введения новых понятий или доказательств утверждений использовались методы аналогии и обобщения.

Анализ пособия М.И. Шабунина [77] показал, что:

1) формула включений и исключений для объединения двух множеств обобщается на случай объединения трех множеств;

2) используя метод обобщения, выводится формула сочетания с повторением $\tilde{C}_m^p = C_{m+p-1}^p$;

3) свойства операций над событиями аналогичны свойствам операций над множествами;

4) используется метод обобщения для вывода формулы умножения вероятностей на случай n событий:

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \dots P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1});$$

Рассмотрение учебного пособия А.Г. Мордковича и П.В. Семенова [51] привело лишь к двум случаям:

1) используя метод обобщения, выводится определение математической модели с двумя исходами;

2) дается обобщенное неравенство Коши

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2 \dots a_n}.$$

Анализ учебного пособия А.Н. Рурукина [65] показал, что:

1) обобщается понятие квадратного корня на корень n-й степени;

2) используя метод аналогии, выводится понятие корня n-й степени из числа a;

3) используется метод обобщения для введения понятия «степень числа», «показательная функция» и «степенная функция».

На основе проведенного исследования, можно составить Таблицу 1 и Таблицу 2 (см. ниже).

Таблица 1

Темы с использованием метода обобщения в X-XI классах

Метод обобщения	
X класс	XI класс
Признак делимости числа на 11	Формула включений и исключений на случай трех множеств
Непрерывность функции на промежутке	формула сочетания с повторением $\tilde{C}_m^p = C_{m+p-1}^p$
Формула для нахождения приближенного значения дифференцируемой в точке функции	Формула умножения вероятностей на случай n событий
Обобщенная теорема Виета	Математическая модель с двумя исходами
Общий член числовой последовательности	Обобщенное неравенство Коши
	Корень n-й степени
	Степень числа
	Показательная функция
	Степенная функция

Таблица 2

Темы с использованием метода аналогии в X-XI классах

Метод аналогии	
X класс	XI класс
«Комплексные числа – координатная плоскость»	Свойства операций над событиями
Свойства операций над множествами	Понятие корня *n*-й степени из числа *a*
Делимость многочленов	
Предел функции	
Арифметические операции над пределами функций в точке	

Можно сделать вывод о том, что в учебных пособиях за X класс в равной степени используются методы аналогии и обобщения для введения понятий, а в XI классе преобладает использование метода обобщения для введения понятий.

Несмотря на сделанные выводы, подчеркнем, что методы аналогии и обобщения недостаточно используются в курсе алгебры в основной школе, так как в некоторых пособиях методы использовались в одном или двух случаях.

3.2. Анализ учебных пособий по геометрии X-XI классов

Исследование учебных пособий *по геометрии за X класс* проводилось на наличие тем, в которых для введения новых понятий или доказательств теорем использовались методы аналогии и обобщения, применяемые в дальнейшем при решении и задач или в качестве заданий для обучающихся.

Анализ учебного пособия В.А. Яровенко [84] показал, что:

1) метод аналогии используется для введения понятия параллельности отрезка и прямой, параллельности двух лучей: проводится аналогия с параллельностью двух отрезков;

2) метод обобщения используется для введения понятия параллельности двух прямых в пространстве;

3) транзитивность параллельных прямых в пространстве аналогична этому свойству на плоскости;

4) взаимное расположение прямых аналогично взаимному расположению плоскостей;

5) используя метод обобщения, выводятся формулы для нахождения числа вершин, ребер и граней любой пирамиды и призмы;

6) с помощью метода обобщения дается определение пирамиды и усеченной пирамиды;

7) определение и свойства векторов в пространстве аналогичны определению и свойствам векторов на плоскости.

Анализ учебного пособия Т.Л. Афанасьевой и Т.И. Купоровой [19] выявил несколько случаев:

1) аксиомы стереометрии аналогичны соответствующим аксиомам планиметрии;

2) взаимное расположение прямых в пространстве аналогично взаимному расположению прямых на плоскости;

3) используя метод обобщения, выводится признак перпендикулярности прямой и плоскости;

4) с помощью метода обобщения выводится формула расстояния между двумя точками в пространстве;

5) определение преобразования подобия в пространстве аналогично определению преобразования подобия на плоскости.

Столько же случаев найдено в учебном пособии Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича и Л.Я. Шляпочника [59]:

1) с помощью метода аналогии дается утверждение о перпендикуляре, наклонной и ее проекции на плоскость: проводится аналогия с перпендикуляром, наклонной и ее проекцией на прямую;

2) свойства параллельности плоскостей в пространстве аналогичны свойствам параллельности прямых на плоскости;

3) метод обобщения используется для вывода пространственной теоремы Фалеса;

4) операции над векторами и их свойства аналогичны, переходя к пространству;

5) решение задач на взаимное расположение двух сфер, сферы и плоскости аналогичны решению планиметрических задач на взаимное расположение двух окружностей, окружности и прямой.

Больше всего показал анализ учебного пособия В.М. Паповского [53]:

1) метод обобщения используется для введения понятия *n*-звенной ломаной;

2) используя метод аналогии, даются теоремы о способах задания прямых и плоскостей в пространстве;

3) метод аналогии используется для введения понятия серединного перпендикуляра на плоскость;

4) теорема Пифагора обобщается на случай пространства;

5) проводится аналогия угол-конус;

6) метод обобщения используется для введения определения сферы и шара: окружность и круг обобщаются на случай пространства;

7) при введении понятия равенства фигур используется метод обобщения;

8) обобщается понятие подобия фигур.

Исследование учебных пособий *по геометрии за XI класс* проводилось на наличие тем, в которых для введения новых понятий или доказательств теорем использовались методы аналогии и обобщения, применяемые в дальнейшем при решение задач или в качестве заданий для обучающихся.

Анализ учебного пособия Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [61] показал, что:

1) понятия «образ» и «прообраз» в теории геометрических преобразований аналогичны понятиям «значение аргумента» и «значение функции» в теории числовых функций;

2) движение пространства обладает многими свойствами, аналогичные свойствам движения плоскости;

3) используя метод аналогии, дается определение симметрии относительно плоскости в пространстве: оно аналогично определению симметрии относительно прямой в плоскости;

4) метод аналогии используется для введения понятия параллельного переноса пространства и его свойств: они аналогичны параллельному переносу плоскости;

5) определения и свойства преобразований гомотетии и подобия пространства аналогичны соответствующим определениям и свойствам таких же преобразований плоскости;

6) используя метод обобщения, вводится определение многогранного угла и n-угольной пирамиды;

7) взаимное расположение сферы и плоскости аналогичны взаимному расположению окружности и прямой;

8) сфера, вписанная (описанная) в многогранник, аналогична окружности, вписанной (описанной) в многоугольник;

9) окружность и прямоугольник обобщаются на случай пространства до сферы и цилиндра соответственно;

10) окружность и равнобедренный треугольник обобщаются на случай пространства до сферы и конуса.

Найдено только лишь четыре случая использования данных методов в учебном пособии В.А. Яровенко [62]:

1) метод обобщения используется для введения понятия сферы;

2) касательная плоскость к сфере аналогична касательной прямой к окружности;

3) с помощью метода аналогии вводится понятие вписанного (описанного) шара (сферы): оно аналогично понятию вписанного (описанного) многоугольника;

4) используя метод обобщения, вводятся понятия «объем n-угольной произвольной призмы» и «объем произвольной пирамиды».

Столько же представлено в учебном пособии В.М. Паповского [53]:

1) метод обобщения используется для введения понятия «многогранник»;

2) понятия простого многоугольника и многогранника обобщаются до понятия простой фигуры;

3) используя метод обобщения, вводятся понятие координаты точки в пространстве и понятие движения в пространстве;

4) обобщается понятие вектора на случай пространства.

Анализ учебного пособия Т.Л. Афанасьевой и Л.А. Тапилиной [21] показал, что:

1) используя метод обобщения, вводится понятие многогранного угла;

2) свойства параллелепипеда аналогичны свойствам параллелограмма;

3) метод обобщения используется для введения понятия «n-угольная пирамида»;

4) используя метод обобщения, вводится определение касательной плоскости к сфере;

5) метод обобщения используется для выведения формулы объема n-угольной призмы;

6) обобщается формула для объемов тел вращения.

Анализ статьи в газете И. Смирновой [68] показал, что используя метод аналогии, вводится понятие «объем» и его свойства: они аналогичны понятию площади и ее свойствам.

На основе проведенного исследования, можно составить Таблицу 3 и Таблицу 4 при изучении которых используются методы аналогии и обобщения соответственно в X-XI классах.

Можно сделать вывод о том, что в учебных пособиях за X класс оба метода используются в равной степени и для введения понятий, и для доказательства теорем. В XI классе оба метода используются в равной степени для введения понятий, но ни одна теорема не доказывается с помощью методов аналогии и обобщения.

Таблица 3

Темы с использованием метода обобщения в X-XI классах

Метод обобщения	
X класс	XI класс
Формула для нахождения числа вершин, ребер и граней любой пирамиды и призмы	Объем n-угольной произвольной призмы, пирамиды
Расстояние между двумя точками в пространстве	Касательная плоскость к сфере
n-звенная ломаная	Сфера и цилиндр
Признак перпендикулярности прямой и плоскости	Координаты точки в пространстве
Подобие фигур в пространстве	n-угольная пирамида
Параллельность двух прямых в пространстве	Векторы в пространстве
Равенство фигур	Движение пространства
Пространственная теорема Фалеса	Многогранный угол
Пространственная теорема Пифагора	Объемы тел вращения
Пирамида	Простая фигура
Сфера и шар	Многогранник
Усеченная пирамида	

Таблица 4

Темы с использованием метода аналогии в X-XI классах

Метод аналогии	
X класс	XI класс
Взаимное расположение плоскостей	Свойства параллелепипеда
Преобразования в пространстве	Симметрия относительно плоскости в пространстве
Теорема о способах задания прямых и плоскостей в пространстве	Преобразование гомотетии и подобия
Векторы в пространстве	Параллельный перенос пространства и его свойства
Аксиомы стереометрии	Касательная плоскость к сфере
Параллельность отрезка и прямой, двух лучей	Сфера, вписанная (описанная) в многогранник
Серединный перпендикуляр на плоскость	Объем фигур и его свойства
Взаимное расположение двух сфер, сферы и плоскости	Свойства движения пространства
Операции над векторами и их свойства	«Образ» и «прообраз»
Транзитивность параллельных прямых в пространстве	
Угол-конус	
Подобие фигур	
Свойства параллельности плоскостей	
Перпендикуляр, наклонная и ее проекция на плоскость	

3.3. Анализ учебников по алгебре и геометрии X-XI классов

После исследования учебных пособий на основные учебники, которые соответствуют требованиям ФГОС среднего (полного) общего образования, необходимо провести анализ задачного материала по этим же учебникам. Все данные представлены в Таблице 5 и Таблице 6.

Таблица 5

Задачи из учебников по алгебре, составленные с использованием методов аналогии и обобщения

Название учебника	Задачи по аналогии	Задачи с обобщением
Алгебра 10-11 класс под ред. А.Н. Колмогорова [5]	Представлено 11 задач	Представлено 10 задач
Алгебра 10 класс. Г.К. Муравин и О.В. Муравина [41]	Всего 21 задача	Всего 19 задач
Алгебра 11 класс. Г.К. Муравин и О.В. Муравина [42]	Представлено 19 задач	Представлено 17 задач
Алгебра 10 класс. Н.Я. Виленкин и др. [40]	Всего 19 задач	Всего 31 задача
Алгебра 10-11 класс под ред. А.Г. Мордковича [4]	Представлено 20 задач	Представлено 19 задач

На основе полученных данных можно сделать вывод, что в большей степени задачи по аналогии присутствуют в учебнике за 10 класс Г.К. Муравина и О.В. Муравиной [41], а с обобщением – в учебнике Н.Я. Виленкина и др. [40].

Таблица 6

Задачи из учебников по геометрии, составленные с использованием методов аналогии и обобщения

Название учебника	Задачи по аналогии	Задачи с обобщением
Геометрия 10-11 класс. А.В. Погорелов [57]	Представлено 23 задачи	Представлено 43 задачи
Геометрия 10-11 класс. Л.С. Атанасян [20]	Всего 20 задач	Всего 26 задач
Геометрия 10 класс. Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич [43]	Представлено 27 задач	Представлена 31 задача
Геометрия 11 класс. Е.В. Потоскуев и Л.И. Звавич [60]	Всего 38 задач	Всего 56 задач

На основе полученных данных можно сделать вывод, что в большей степени задачи по аналогии и обобщению присутствуют в учебнике за 11 класс Е.В. Потоскуева и Л.И. Звавича [60].

Следует заметить, что в большинстве случаев аналогичные задачи находились в разных параграфах, и, зачастую, авторы не отмечали их сходство.

§4. Требования к системам задач, ориентированным на применение методов аналогии и обобщения

Усовершенствование методики преподавания математики в общеобразовательной школе требует от учителя большего внимания к системе и подбору задач. Задачи не должны быть направлены только на механическое применение различных формул и на запоминание приемов решения различных типов задач. В систему задач необходимо включать такие задачи, которые будут направлены на развитие мышления, на обоснование совершаемых операций, на самостоятельное составление условия задачи (параллельно с решением готовых), на повышение культуры вычислений.

Программы требуют «проводить систематическую и целенаправленную работу по развитию логического мышления учащихся». В целях развития мышления, по мнению С.Е. Ляпина, следует широко практиковать самостоятельные выводы различных формул и возвращать учащихся к сделанным обобщениям, к основным положениям для получения того или иного вывода.

В подборе задач, подчеркивает С.Е. Ляпин, необходимо соблюдать не только постепенное усложнение, но и подчеркивать принципиальное разнообразие вариантов [47, С.313].

Ю.М. Колягин в книге «Задачи в обучении математике. Ч. II» предлагает следующие критерии по подбору задач:

1) соответствует ли подбор задач в целом основной учебной цели урока, отвечает ли он его содержанию, то есть реализуются ли через данные задачи основные обучающие функции;

2) достаточен ли объем задачного материала для того, чтобы все учащиеся сумели активно и эффективно решить ту или иную задачу в течение учебного времени, запланированного для этого;

3) в какой мере реализуются в задачах их развивающие функции; как они согласуются с конкретными обучающими функциями;

4) достаточно ли оптимально представлено в задачах и упражнениях соотношение конкретного с абстрактным, насколько полно отражена в задачах взаимосвязь между теорией и практикой, связь обучения математике с жизнью;

5) как, в какой форме, с какой полнотой будут оформляться записи решения задач на доске, в тетрадях учащихся, каким образом задачи и упражнения будут решаться устно;

6) в какой мере предлагаемые на уроке задачи опираются на задачи и упражнения, выполненные ранее, какова мера их новизны для учащихся;

7) отвечает ли задачный материал цели возбуждения и развития интереса учащихся к изучаемой теме, к математике в целом;

8) в какой мере через данные задачи могут быть реализованы воспитывающие функции, в какой мере содействуют задачи: воспитанию на уроке ответственного отношения учащихся к учению, воспитанию умений самостоятельно учиться, эстетическому воспитанию и так далее [33, С.121].

Я.И. Груденов в книге «Совершенствование методики работы учителя математики» [25] предлагает несколько требований (принципов), которым должна соответствовать система задач:

1) однотипность задач;
2) принцип непрерывного повторения;
3) контрпримеры – «провоцирующие» упражнения;
4) принцип сравнения;
5) принцип полноты.

Пояснения автора о данных принципах описывается ниже.

Для формирования у всех учащихся прочных навыков необходимо сохранить однотипность системы задач, а для нейтрализации ее отрицательных последствий одновременно использовать и другие принципы.

Принцип непрерывного повторения заключается в том, что в однотипную систему задач по новой теме с первого момента ее изучения включаются задачи из предшествующих разделов.

Контрпримеры, изредка включаемые в систему задач, помогают усиливать интерес учащихся, их внимание, активизировать мыслительную деятельность.

Под принципом сравнения понимается чередование задач на прямые и обратные операции, чередование любых других задач, когда хотят подчеркнуть их взаимосвязь, сходства и различия. Этот принцип используется в тех случаях, когда среди задач встречаются такие, которые учащиеся различают с трудом.

Система задач удовлетворяет принципу полноты, если она обеспечивает хорошее усвоение изучаемой темы и позволяет исключать возможность формирования ошибочных ассоциаций. Я.И. Груденов считает, что выбирая из учебника задачи к изучаемой теме, учителю необходимо следить за тем, чтобы при таком отборе не нарушился принцип полноты.

Подчеркивается, что для подбора системы задач к уроку, учителю необходимо следить и за соблюдением других дидактических принципов: сознательности, доступности, активности и другие. Задачи должны быть доступными, выполняться с полным пониманием, располагаться с постепенным нарастанием трудности.

Система задач не должна строиться на всех принципах сразу, но выполнение нескольких из них обязательно по мере возможности.

Под системой задач будет пониматься совокупность блоков задач, развивающих определенное умение по заданной теме, удовлетворяющих принципам Я.И. Груденова.

Выводы по первой главе

При изучении теоретических основ методов аналогии и обобщения при обучении математик в общеобразовательной школе были сделаны следующие выводы:

1) аналогия – подобие, сходство предметов или явлений в каких-либо свойствах, признаках, отношениях, причем сами эти предметы различны;

2) метод аналогии основывается на рассмотрении вспомогательной задачи, которая либо дается учителем, либо учащийся сам вспоминает аналогичное задание, с последующим решением основной задачи;

3) возникновение типичных ошибок связано с проведением «ложных» аналогий в свойствах схожих объектов;

4) обобщение является переходом от данного множества предметов к рассмотрению более «емкого» множества, содержащего данное;

5) результат метода обобщения (перенос, использование задачи-подсказки) зависит от работы, проведенной учащимися в процессе анализа условия основной задачи;

6) используя метод обобщения при решении различных задач из курса алгебры и геометрии, выявляются различные обобщения, которые в дальнейшем могут использоваться в процессе обучения математики;

7) анализ учебных пособий по алгебре и геометрии (см. табл. 1-4) показал, что методы аналогии и обобщения чаще всего используются в X классе;

8) анализ учебников (см. табл. 5-6) показал, что в большинстве случаев в курсе алгебры задачи по аналогии присутствуют в учебнике за 10 класс [41], а с обобщением – в учебнике [40], а в курсе геометрии по аналогии и обобщению – в учебнике за 11 класс [60];

9) выделены принципы, которые должны выполняться при составлении системы задач для конкретной темы: однотипность задач, принцип непрерывного повторения, контрпримеры – «провоцирующие» упражнения, принцип сравнения, принцип полноты.

ГЛАВА II. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДОВ АНАЛОГИИ И ОБОБЩЕНИЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СТАРШИХ КЛАССОВ

§5. Системы задач на применение методов аналогии и обобщения в курсе математики

5.1. Система задач на применение метода обобщения при изучении темы «Числовые последовательности» в IX классе

На изучение темы «Числовые последовательности» в IX классе, входящая в раздел «Прогрессии», на которую отводится 14 часов [64, С.88], уделяется недостаточно времени, так как в основном прорабатываются формулы n-х членов арифметической и геометрической прогрессии. У учащихся могут возникнуть проблемы с распознаванием последовательностей в общем случае.

Для составления данной системы задач был взят за основу задачник Ю.Н. Макарычева [3], с добавлением нескольких примеров из учебников А.Г. Мордковича [2] и Г.К. Муравина [1].

Данная система задач направлена на то, чтобы у учеников сформировалось более общее представление о последовательности при изучении темы «Числовые последовательности». Для этого им необходимо воспользоваться методом обобщения. Так ученики смогут рассматривать не частные случаи, а целые классы объектов, что им понадобится в дальнейшем изучении не только алгебры, но и геометрии.

Представленная система задач состоит из трех блоков задач, составленных таким образом, чтобы проработать каждый аспект темы «Числовые последовательности», то есть выполняется принцип полноты.

Первый блок задач направлен на работу с определением понятия «числовые последовательности». Первый блок состоит из семи заданий, по своей сути однотипных, с разницей только в задании самой последовательности с последующим возрастанием сложности, тем самым выполняются принципы непрерывного повторения и сравнения.

Второй блок задач направлен на закрепление свойств числовых последовательностей. Второй блок состоит из четырех заданий: в первых двух по два однотипных примера, а в последних – по четыре, с разницей только в записи номеров членов последовательности, тем самым выполняется принцип непрерывного повторения.

Третий блок задач направлен на развитие умения задания последовательности рекуррентным способом. Третий блок состоит из пяти заданий, в каждом из которых соответственно по четыре однотипных примера, с разницей лишь в задании членов последовательностей с последующим возрастанием сложности, то есть выполняются принципы непрерывного повторения и сравнения.

Блок I. Понятие числовой последовательности.

1. Найдите несколько членов возрастающей последовательности всех натуральных чисел, кратных пяти. Укажите ее шестой, девятый, двадцать первый, n-й члены.

2. Выпишите первые несколько членов последовательности натуральных чисел, кратных 3, взятых в порядке возрастания. Укажите ее первый, пятый, десятый, сотый и n-й члены.

3. Найдите несколько начальных членов возрастающей последовательности всех натуральных чисел, кратных семи. Укажите ее восьмой, десятый, тридцать седьмой, n-й члены.

4. Известно, что (a_n) – возрастающая последовательность кубов всех натуральных чисел. Найдите a_1, a_2, a_3, a_4, a_n.

5. Известно, что (b_n) – возрастающая последовательность всех натуральных степеней числа 2. Найдите b_1, b_2, b_3, b_4, b_n.

6. Известно, что (c_n) – последовательность, все члены которой с нечетными номерами равны –1, а с четными равны 0. Выпишите первые

восемь членов этой последовательности. Найдите $c_{10}, c_{25}, c_{200}, c_{253}, c_{2k}, c_{2k+1}$ (k – произвольное натуральное число).

7. Пусть (a_n) – последовательность квадратов натуральных чисел. Выпишите первые десять ее членов. Найдите a_{20}, a_{40}, a_n.

Блок II. Свойства числовой последовательности.

8. Назовите член последовательности (y_n), который:

а) следует за членом $y_{31}, y_n, y_{n+9}, y_{2n}$;

б) предшествует члену $y_{91}, y_{639}, y_{n-1}, y_{3n}$.

9. Какой член последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$:

а) следует за членом $a_{99}, a_{200}, a_n, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{2n}$.

б) предшествует члену $a_{71}, a_{100}, a_{n-2}, a_{n+3}, a_{3n}$.

10. Назовите все члены последовательности (a_n), которые расположены между членами:

а) a_{638} и a_{645};

б) a_{1002} и a_{1008};

в) a_{n+3} и a_{n+10};

г) a_{n-2} и a_{n+2}.

11. Перечислите члены последовательности (x_n), которые расположены между:

а) x_{31} и x_{35};

б) x_n и x_{n+6};

в) x_{n-4} и x_n;

г) x_{n-2} и x_{n+2}.

Блок III. Задание последовательности рекуррентным способом.

12. Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

а) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$;

б) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$;

в) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$;

г) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 6}, \dots$.

13. Составьте одну из возможных формул n-го члена последовательности по первым пяти ее членам:

а) $-\frac{2}{2}, \frac{4}{5}, -\frac{6}{8}, \frac{8}{11}, -\frac{10}{14}, \dots$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \dots$;

в) $\frac{2}{5}, -\frac{4}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{16}{20}, \frac{32}{25}, \dots;$

г) $-\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, \frac{4}{\sqrt{2\cdot 3}}, -\frac{9}{\sqrt{3\cdot 4}}, \frac{16}{\sqrt{4\cdot 5}}, -\frac{25}{\sqrt{5\cdot 6}}, \dots.$

14. Выпишите первые шесть членов последовательности (x_n), у которой $x_1 = -3$, $x_2 = -2$ и каждый член, начиная с третьего, равен удвоенной сумме двух предыдущих членов. Составьте рекуррентное задание последовательности.

15. Задайте последовательность рекуррентным способом:

а) $2,2,2,2,2, \dots;$ в) $9,7,5,3,1, \dots;$

б) $2,4,6,8,10, \dots;$ г) $5, -5,5, -5,5, -5, \dots.$

16. Задайте последовательность рекуррентным способом:

а) $2,6,18,54,162, \dots;$ в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots;$

б) $1,8,15,22,29, \dots;$ г) $3, -9,27, -81,243, \dots.$

Ответы к заданиям по теме «Числовые последовательности»

12. а) $a_n = \frac{1}{2n-1}$; б) $a_n = \frac{n}{n+1}$; в) $a_n = \frac{1}{n^2}$; г) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

13. а) $a_n = (-1)^n \frac{2n}{3n-1}$; б) $a_n = \frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;

в) $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2^n}{5n}$; г) $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{\sqrt{n(n+1)}}$.

14. $x_n = 2(x_{n-2} + x_{n-1}), n \geq 3$.

15. а) $x_1 = 2, x_n = x_{n-1}$; б) $x_1 = 2, x_n = x_{n-1} + 2$;

в) $x_1 = 9, x_n = x_{n-1} - 2$; г) $x_1 = 5, x_n = -x_{n-1}$.

16. а) $x_1 = 2, x_n = 3x_{n-1}$; б) $x_1 = 1, x_n = x_{n-1} + 7$;

в) $x_1 = 0{,}5, x_n = 0{,}5x_{n-1}$; г) $x_1 = 3, x_n = -3x_{n-1}$.

5.2. Система задач на применение метода аналогии при изучении темы «Параллельность плоскостей» в X классе

Для повышения эффективности изучения темы «Параллельность плоскостей» в X классе, входящей в раздел «Параллельность прямых и плоскостей», на которую отводится 20 часов [64, С.228], необходимо проводить аналогию с параллельностью прямых на плоскости. Так ученики смогут актуализировать свои знания, увидеть еще одну связь между планиметрическими и стереометрическими понятиями, тем самым выполняется принцип сравнения.

Для составления данной системы задач за основу бралась классификация, составленная В.В. Кочагиным, из журнала [36], а также использовались учебники А.В. Погорелова [57], Л.С. Атанасяна [18] и [20] и И.М. Смирновой и В.А. Смирнова [69]. Представленная система задач состоит из двух блоков, составленных таким образом, чтобы у учащихся сформировалось общее представление о взаимном расположении плоскостей в пространстве, то есть выполняется принцип полноты.

Первый блок задач направлен на закрепление свойств и признаков параллельности плоскостей. Первый блок состоит из восьми заданий, которые разбиты на пары. Таким образом, проводится аналогия с параллельностью прямых на плоскости, то есть выполняется принцип непрерывного повторения и сравнения.

Второй блок задач направлен на развитие пространственного мышления у учащихся. Второй блок состоит из шести заданий, которые разбиты на аналогичные пары, то есть выполняется принцип сравнения. Таким образом, ученикам будет легче представить расположение плоскостей в пространстве.

Блок I. Свойства и признаки параллельности плоскостей.

1. Докажите, что через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

2. Докажите, что через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

3. Докажите, что если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

4. Две плоскости α и β параллельны плоскости γ. Докажите, что плоскости α и β параллельны.

5. Прямые a и b параллельны прямой c. Докажите, что любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает также и прямую b.

6. Докажите, что если плоскость γ пересекает одну из параллельных плоскостей α и β, то она пересекает и другую плоскость.

7. Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

8. Верно ли, что две плоскости, перпендикулярные третьей, параллельны?

Блок II. Пространственное мышление.

9. На сколько частей делят плоскость две пересекающиеся прямые?

10. На сколько частей делят пространство две пересекающиеся плоскости?

11. На сколько частей делят плоскость две параллельные прямые?

12. На сколько частей делят пространство две параллельные плоскости?

13. На сколько частей делят плоскость три прямые, пересекающиеся в одной точке?

14. На сколько частей делят пространство три плоскости, пересекающиеся по одной прямой?

Решение заданий по теме «Параллельность плоскостей»

10. Две пересекающиеся плоскости делят пространство на четыре части, представленные двугранными углами (рис. 9).

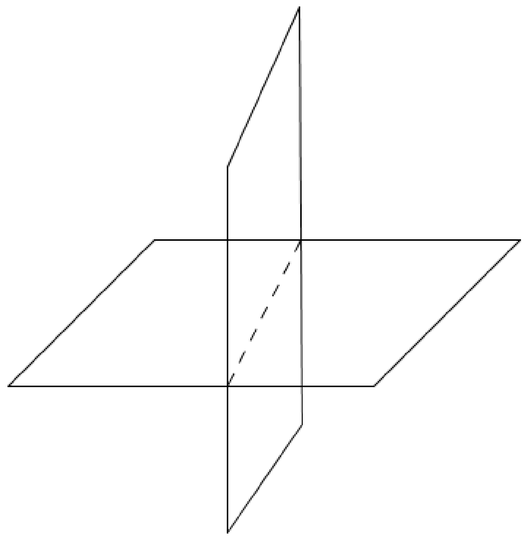

Рис. 9

12. Две параллельные плоскости делят пространство на три части (рис. 10).

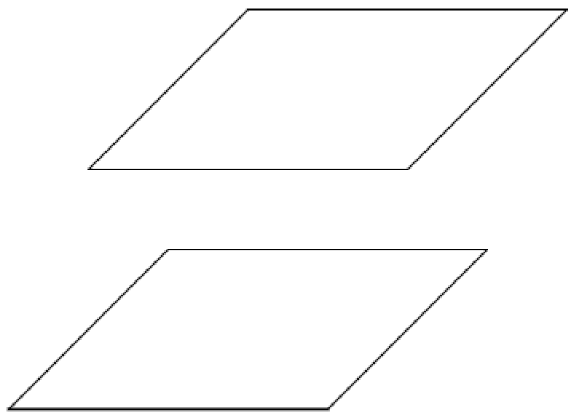

Рис. 10

14. Три плоскости, пересекающиеся по одной прямой, делят плоскость на шесть частей, представленных двугранными углами (рис. 11).

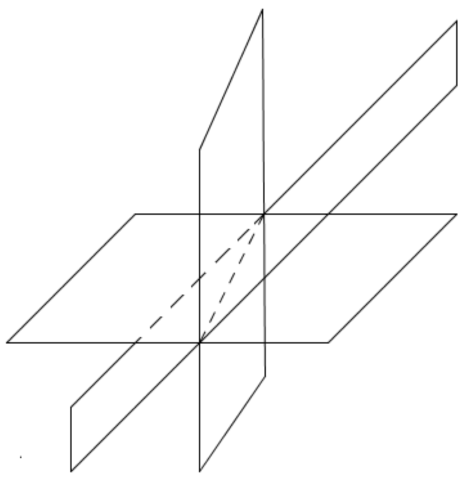

Рис. 11

Представленная система задач отражена в статье сборника трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева) [13].

5.3. Система задач на применение метода обобщения при изучении темы «Объемы многогранников» в XI классе

Тема «Объемы многогранников» в XI классе входит в раздел «Объемы тел», на который отводится 19 часов [64, С.236]. Данная система задач поможет учащимся, используя метод обобщения, вывести несколько новых формул, которые могут понадобиться в дальнейшем в процессе обучения.

Для составления данной системы задач использовались учебники Л.С. Атанасяна [20], А.В. Погорелова [57] и книга В.В. Прасолова и И.Ф. Шарыгина [63]. Представленная система задач состоит из двух блоков, составленных таким образом, чтобы у учащихся сформировалось общее представление об объеме многогранников, то есть выполняется принцип полноты.

Первый блок задач направлен на выведение новых формул для тетраэдра и пирамиды, с последующим их использованием учащимися в процессе обучения. Первый блок состоит из шести задач, которые расположены в порядке возрастания сложности, тем самым выполняется принцип непрерывного повторения.

Второй блок задач направлен на выведение новых формул для параллелепипеда и призмы, с последующим их использованием учащимися в процессе обучения. Второй блок состоит из шести заданий, расположенных в порядке возрастания сложности, то есть выполняется принцип непрерывного повторения.

Блок I. Объем тетраэдра и пирамиды.

1. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое равно b. Найти объем пирамиды.

2. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла α и β, радиус описанного круга R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом γ.

3. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ равен,

$$\frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\beta \sin\gamma \sin D,$$

где β и γ – плоские углы при вершине A, противолежащие ребрам AB и AC, а D – двугранный угол при ребре AD.

4. Площади двух граней тетраэдра равны S_1 и S_2, a – длина их общего ребра, α – двугранный угол между ними. Докажите, что объем V тетраэдра равен

$$\frac{2}{3a} S_1 S_2 \sin\alpha.$$

5. Докажите, что объем тетраэдра $ABCD$ равен

$$\frac{d}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot \sin\varphi,$$

где d – расстояние между прямыми AB и CD, φ – угол между ними.

6. Точка K принадлежит основанию пирамиды с вершиной O. Докажите, что объем пирамиды равен

$$S \cdot \frac{KO}{3},$$

где S – площадь проекции основания на плоскость, перпендикулярную KO.

Блок II. Объем параллелепипеда и призмы.

7. Как изменится объем прямого параллелепипеда, если: а) одно из его измерений увеличить в 2 раза, в 3 раза, в n раз; б) если два его измерения увеличить, причем каждое из них в 2, 3, n раз; если все три его измерения увеличить в 2, 3, n раз?

8. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого a составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β?

9. Найдите формулу объема правильной n-угольной призмы, высота которой равна h, а сторона основания равна a.

10. В наклонной призме проведено сечение, перпендикулярное боковым ребрам и пересекающее все боковые ребра. Найдите объем призмы, если площадь сечения Q, а боковые ребра равны l (рис. 12).

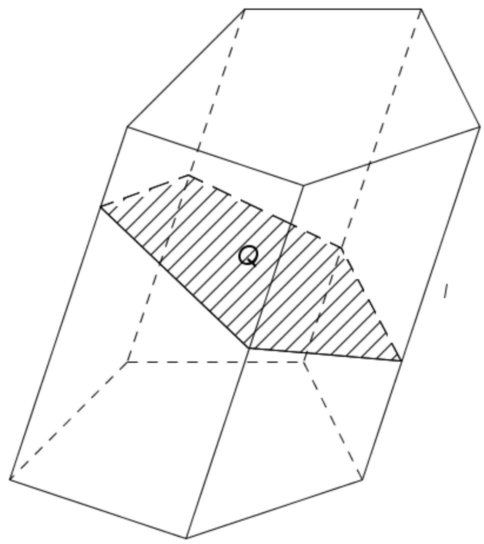

Рис. 12

11. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота h, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен γ?

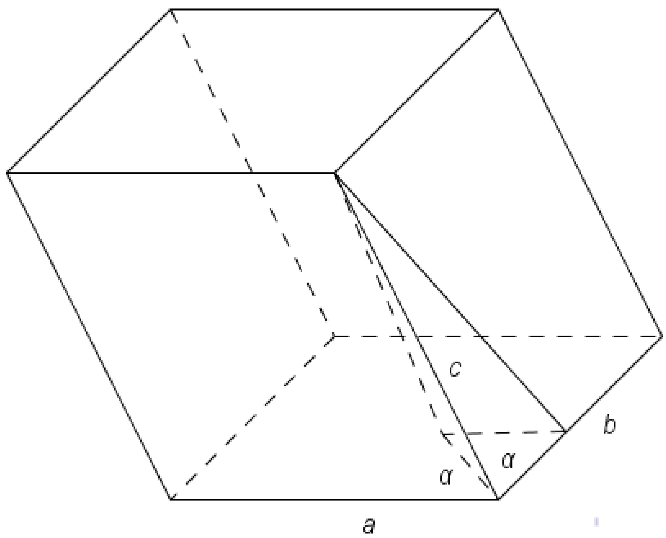

Рис. 13

12. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α (рис. 13). Найдите объем параллелепипеда.

Решение заданий по теме «Объемы многогранников»

4. Пусть h_1 и h_2 – высоты данных граней (рис. 14), опущенные на их общую сторону.

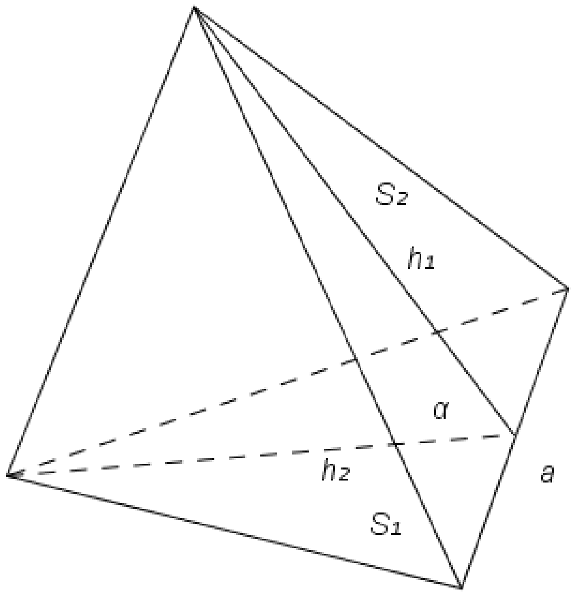

Рис. 14

Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_2 \cdot h_1 \sin\alpha = \frac{1}{6} \cdot a \cdot h_1 h_2 \sin\alpha.$$

Исходя из этих равенств, получаем

$$h_1 = \frac{2}{a} \cdot S_1, \qquad h_2 = \frac{2}{a} \cdot S_2.$$

Подставляя в исходное равенство, получим требуемое.

5. Рассмотрим параллелепипед, образованный плоскостями, проходящими через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам. Плоскости граней исходного тетраэдра отсекают от параллелепипеда четыре тетраэдра, объем каждого из которых составляет $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда. Поэтому объем тетраэдра составляет $\frac{1}{3}$ объема параллелепипеда. А объем

параллелепипеда легко выражается через данные в условии величины: его грань является параллелограммом с диагоналями длиной AB и CD и углом φ между ними, а высота, опущенная на эту грань, равна d. Подставив в формулу объема параллелепипеда, получим требуемое.

6. Угол α между прямой KO и высотой h пирамиды равен углу между плоскостью основания и плоскостью, перпендикулярной KO. Поэтому

$$h = KO\cos\alpha, \qquad S = S'\cos\alpha,$$

где S' - площадь основания. Выражая из этих равенств $\cos\alpha$ и приравнивая их друг к другу, получим требуемое.

10. Плоскость проведенного сечения разбивает призму на две части. Подвергнем одну из них параллельному переносу, совмещающему основания призмы. При этом получим прямую призму, у которой основанием служит сечение исходной призмы, а высота равна l. Эта призма имеет тот же объем. Значит, объем исходной призмы равен Ql.

12. Основание параллелепипеда – прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = b$. Его площадь

$$S = ab.$$

Из точки A_1 проведем перпендикуляры A_1O к плоскости основания (рис. 15), а также $A_1M \perp AD$ и $A_1K \perp AB$.

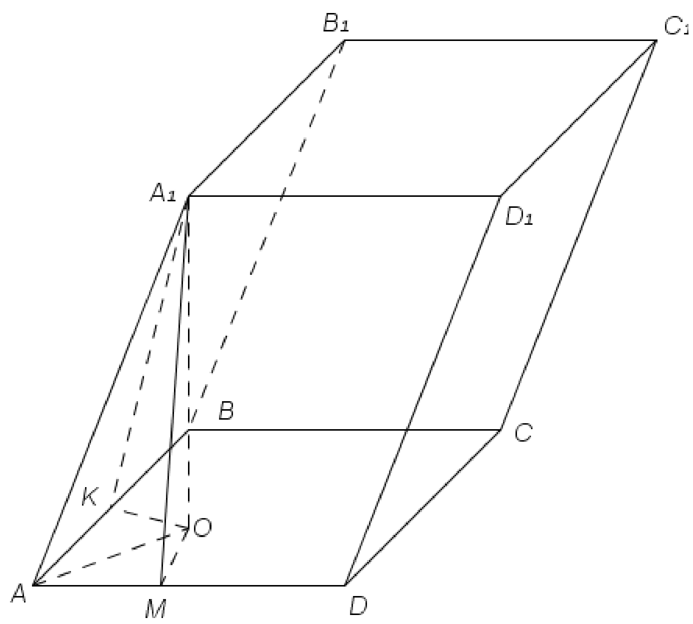

Рис. 15

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $OM \perp AD$ и $OK \perp AB$.

$\Delta AA_1M = \Delta AA_1K$ по гипотенузе и острому углу α. Отсюда

$$AK = AM = AA_1 \cdot \cos\alpha = c \cdot \cos\alpha.$$

$\Delta AMO = \Delta AKO$ (*AO* – общая сторона и *AK*=*AM*). Отсюда

$$\angle MAO = \angle KAO = 45°.$$

Тогда

$$AO = \frac{AM}{\cos\angle MAO} = \frac{c \cdot \cos\alpha}{\cos 45°} = c\sqrt{2}\cos\alpha.$$

В ΔAA_1O по теореме Пифагора получаем:

$$A_1O = \sqrt{{AA_1}^2 - AO^2} = \sqrt{c^2 - 2\cos^2\alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = c \cdot \sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Тогда

$$V = S_{ABCD} \cdot A_1O = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

§6. Методические рекомендации по внедрению систем задач в процесс обучения математике в общеобразовательной школе

6.1. Анализ практического опыта учителей математики на применение аналогии и обобщения при решении задач

В данном пункте проведем анализ практического опыта учителей математики на применение аналогии и обобщения при решении задач, отраженный в научно-методической литературе.

О.Н. Веретенникова в статье [17] подчеркивает, что при изучении элементов сферической геометрии возможно перенесение на сферу некоторых понятий и методов евклидовой геометрии, например, понятие геометрического места точек, прямой и окружности. Далее дается определение обобщенного приема, который понимается как прием, полученный на основе анализа частных приемов путем выделения общего содержания деятельности по решению конкретных (частных) задач, а в свою очередь формирование таких приемов является одним из способов обучения школьников решению задач. У учащихся профильных физико-математических классов, согласно Веретенниковой, их формирование соответствует развивающей парадигме современного образования школьников, способствует реализации деятельностного подхода в обучении, повышает качество усвоения метода решения таких задач, способствует формированию у учащихся навыков самостоятельной и научно-исследовательской деятельности.

В статье [52] акцентируется внимание на том, что такие дидактические приемы, как аналогия и обобщение, способствуют развитию эвристического обучения учащегося. Также дается различие между данными приемами: в результате решения по аналогии получается решение такого же порядка, что и у исходного; при обобщении показывается более высокий уровень мыслительной деятельности, умственного экспериментирования. По мнению М.Г. Никитиной и Е.С. Павловой, методам обобщения и аналогии необходимо учить на специально разработанных упражнениях, так как многократное повторение по шаблону сдерживает развитие мышления учащегося.

Авторы в статье [31] связывают такие понятия, как формирование умения систематизировать знания и формирование умения использовать приемы систематизации, например аналогия и обобщение. Выбор конкретного приема систематизации зависит от содержания материала. Далее приводится группа заданий, в результате выполнения которых учащиеся подводятся к необходимости систематизировать знания. Вот некоторые из них:

Задание 1.

а) что составляет математическую основу темы «Функции», изучаемой в школьном курсе математики?

б) перечислите основные свойства элементарных функций и укажите среди них место и роль такого свойства, как «множество значений функции».

Задание 8.

Можно ли указать общий прием, который является определяющим при решении следующих задач. Если да, то в чем он состоит?

1. Решите уравнение $\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2. Имеет ли решение уравнение $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$?

3. Найдите все параметры действительных чисел x и y, удовлетворяющих равенству: $(x + y)\left(\log_3\left(x + y + \frac{1}{x+y}\right) - \log_3 2\right) + x^2 +$ $+y^2 - 1 = 0$.

4. Доказать, что функция $f(x) = \sin^2 x - 14\sin x \cdot \cos x - 5\cos^2 x +$ $+3\sqrt[3]{33}$ принимает только положительные значения.

В статье [72] выделены принципы организации образовательного пространства в обучении математике, благодаря которым способы исследования становятся предметом освоения:

1. Структуру метода математики можно описать тремя иерархированными уровнями: гносеологическим, методологическим и уровнем связей между ними.

2. Освоение метода математики проходит поэтапно посредством освоения содержания каждого из уровней.

Далее, опираясь на исследования А.Н. Леонтьева, М.В. Тарановой были выделены этапы освоения метода: ознакомительный, категоризации, систематизации, использования, применения. На этапе категоризации ученик на гносеологическом уровне выполняет решение предметных задач по аналогии уже с ранее решенными. На данном этапе методологическое содержание находится в начальной стадии логического обобщения. На этапе использования знания проходят этап встраивания в систему знаний по математике, то есть логически обобщаются. И на заключительном этапе,

этапе применения (обобщения), представления о методе логически обобщены и встроены в систему знаний учащегося, поэтому ученик смело может использовать свои знания.

По мнению автора статьи [39], до сознания учащихся необходимо донести причину возникновения ошибки, а затем противопоставить возникшим у него неверным обобщениям, аналогиям или другое правило. Часто ошибки у учеников, как считает Н.С. Майкова, возникают при решении однотипных упражнений: задачи решаются по аналогии с предыдущими, причем бездумно.

Л.Б. Семушина считает, что одной из составляющих группы познавательных универсальных учебных действий являются логические, в том числе аналогия и обобщение. Применение метода аналогии естественно для человека и происходит еще в раннем детстве, поэтому является ведущим инструментом в научной деятельности. В статье [67] подчеркивается, что данный прием способен побудить у учащихся живой интерес к предмету, удивить, озадачить, вызвать восторг или несогласие. В школьном курсе геометрии большинство стереометрических фактов преподносится без проведения внутри предметных связей с аналогичными планиметрическими фактами. Например, аналогия между треугольником и тетраэдром. Применение метода аналогии дает возможность экономить время, но вывод по аналогии может и не подтвердиться полностью или подтвердиться лишь частично. Так считает Л.Б. Семушина.

В статье [66] подчеркивается, что углубление в суть проблемы, стоящей перед человеком, выделение ее свойств, нахождение решения задачи осуществляется при помощи мыслительных операций: аналогии, обобщения и других. Эти же операции суть методы научного познания. Далее представляются данные методы вкратце.

По мнению автора статьи [66], умение находить сходство, является главным источником плодотворных рассуждений по аналогии, однако это часто бывает нелегко, ведь могут возникать и ложные заключения по аналогии. Их не нужно опасаться, а необходимо считать гипотезами или предположениями. Механизм применения метода аналогии более сложен по своей сути, так как сочетает в себе элементы дедукции и индукции, анализа и синтеза, как считает А.С. Саброва.

В статье [9] сущность процесса обобщения рассматривается в философской, психологической и педагогической науках. В философии под обобщением понимается либо логический прием, который выявляет общие свойства и признаки предметов, либо логический процесс перехода от единичного к общему, а также результат этого процесса. В психологии обобщение – характеристика познавательного процесса, выделяющая и фиксирующая относительно устойчивые свойства предметов и их отношения. В педагогике данный процесс рассматривается более подробно. Так С.В. Арюткина выделяет несколько точек зрения по данному вопросу:

1) В.Ф. Паламарчук считает необходимым формировать у учащихся умение обобщать знания, чтобы их мышление становилось системным. Обобщение классифицируется либо как эмпирическое и теоретическое, либо по степени абстрагирования: частичное, поурочное, тематическое, итоговое и межпредметное. Для формирования данного умения необходимо, по мнению автора, использовать обобщающие проблемные задания.

2) И.Я. Лернер связывает такие два понятия, как конкретность и обобщенность. Автор считает, что любое обобщение содержит в себе скрытую систему конкретных знаний и образов. Также подчеркивается необходимость постепенного обобщения связей для формирования у учеников систематичности знаний.

3) В.А. Ситаров характеризует обобщение как процесс, объединяющий явления по их существенным признакам и свойствам, выделенным при абстрагировании от других.

4) А.А. Темербекова рассматривает обобщение как мысленное выделение общих свойств нескольких объектов и их объединение на основе

выделенной общности, а также существенных свойств объекта в результате анализа их в виде общего понятия для целого класса объектов.

5) С.Л. Рубинштейн описывает обобщение как мысленное выделение каких-либо свойств, принадлежащих лишь данному множеству объектов и объединяющих эти объекты.

6) Д. Пойа под обобщением понимает переход от рассмотрения данного множества предметов к рассмотрению большего множества, включенного в данное. Например, переход от треугольников к многоугольникам, где фиксированное число 3 заменяется произвольным числом n. Данные обобщения возможны как для рассматриваемого процесса в математике, так и для некоторых математических задач.

7) Р.С. Черкасов предлагает использовать задачи на обобщение для развития творческого математического мышления. Также представлены виды обобщения: переход от конкретных высказываний к предложениям, содержащим переменные; введение новых правил, понятий, операций, законов; перенесение закономерностей из одной предметной области в другую; индукция; объединение нескольких закономерностей в одну общую. Для того чтобы учащийся смог свободно применять все представленные виды обобщения, автор предлагает использовать специальные группы дифференцированных заданий, предоставляющихся не только на уроках математики, но и во внеурочное время. Стоит заметить, что Р.С. Черкасов выделил направления обобщения в большей степени для геометрического материала.

Из представленного материала С.В. Арюткина делает вывод, что обобщение математической задачи – это процесс абстрагирования от определенных элементов содержания математической ситуации, описанной в ней. Направление процесса обобщения могут быть использованы в качестве базы стратегии обобщения математической задачи и последующего построения «окрестностей обобщенных задач».

В статье [58] рассматриваются этапы решения математической задачи. Авторы акцентируют внимание на четвертом этапе – анализ полученного решения и придерживаются точки зрения Г.И. Саранцева в том, что реализация данного этапа должна включать составление задач-аналогов данной и задачи-обобщения.

В статье [34] авторы подчеркивают, что использование метода аналогии предполагает «включенность ученика в процесс добывания знаний», что способствует более прочному усвоению учебного материала. Одним из основных видов деятельности, развивающих учащегося, является решение задач, которые являются основным средством организации процесса обучения на всех этапах учебной деятельности. Далее рассматривается роль и место аналогии, а также дидактические аспекты освоения учащимися метода аналогии в процессе обучения решению геометрических задач.

Понятие аналогии в статье [34] рассматривается в трех аспектах: как понятие отношения сходства между различными объектами или явлениями, как форма умозаключения, как метод познания. Метод аналогии определяется как «метод обучения, при котором обоснованно и целенаправленно реализуются: составление и нахождение аналогов различных заданных объектов и отношений; составление задач, аналогичных заданным; перенос информации о модели на оригинал, в частности проведение рассуждений при решении задачи по аналогии с решением исходной задачи; проверка утверждений, сделанных по аналогии».

Далее авторы выделяют этапы решения задачи, придерживаясь точки зрения Д. Пойа: 1) осмысление условия задачи; 2) составление плана решения; 3) осуществление плана решения; 4) изучение найденного решения. Р.Ю. Костюченко и Н.А. Юдина считают, что целесообразнее использовать метод аналогии на втором и четвертом этапе решения задачи.

На основе проведенного констатирующего эксперимента, авторами были сделаны следующие выводы:

1) Наибольшие затруднения учащиеся представляют при поиске способа решения нестандартной задачи. Применение метода аналогии в данном случае может быть представлено схемой с компонентами: а) решаемая задача; б) вспомогательная задача; в) решение вспомогательной задачи; г) установленный факт и/или метод вспомогательной задачи; д) решение исходной задачи.

2) На заключительном этапе решения планиметрических задач выделяются три составляющие: 1) исследование задачи и хода решения (учащиеся применяют аналогию на основе сходства); 2) формулирование и решение задач, порожденных данной (учащиеся применяют аналогию на основе начального или конечного состояния задачи); 3) поиск новых способов решения задачи (учащиеся применяют аналогию на основе базиса решения или самого решения задачи).

3) Комплекс планиметрических заданий на заключительном этапе решения задачи предполагает задания таких видов как: задания, направленные на исследование задачи и хода ее решения, реализующие различные виды аналогий: применения, обобщения, контакта, предельную, преобразований, тривиальную и противоположностей; задания, направленные на формулирование и решение задач, порожденных разобранной; задания, направленные на поиск и осуществление новых способов решения, которые реализуют аналогию в структуре планиметрической задачи.

В статье [45] рассматривается понятие «аналогичная задача» или «задача-аналог» и способы ее составления. Автор замечает, что в дидактической и методической литературе чаще всего под аналогичными задачами подразумеваются задачи, имеющие аналогию в решении, черты сходства в компонентах структуры. В том случае, если задачи-аналогии практически идентичны, их называют задачами-клонами. С.В. Менькова под данным термином понимает задачи, одинаковой сложности, способу решения, теоретической базе, отличающиеся друг от друга числовыми данными, обозначениями, расположением объектов, наименованием нематематических объектов задачи.

Для того чтобы составить задачи-аналоги, по мнению автора, можно воспользоваться следующими приемами: варьирование числовых значений величин, варьирование сюжета, переформулировка задачи, расширение условия и добавление новых требований, составление подзадач, обобщение, конкретизация и другие. С.В. Менькова выделяет варьирование числовых значений, изменение сюжета задачи, изменение условия и требования задачи, как одни из самых распространенных приемов составления задач-аналогов. Приведем примеры некоторых задач, представленных в статье.

Задача 1.

Сколько существует различных кодов, составленных из двух цифр?

Задача 2.

Сколько можно составить буквосочетаний из двух гласных букв русского алфавита?

В статье [45] подчеркивается, что современному учителю необходимо обладать таким профессиональным навыком, как умение составлять задачи-аналоги и учить этому школьников, развивая тем самым их творческую активность и способность быстро находить связи между решенными и новыми, более трудными задачами.

6.2. Результаты анкетирования учителей математики по теме исследования

На основе приведенного выше анализа опыта учителей были составлены вопросы анкеты, предназначенной для выявления случаев применения методов аналогии и обобщения на уроках математики.

В данном анкетировании участвовали 15 учителей математики из МБУ «Школа № 34», МБУ «Школа № 58», МБУ «Школа с углубленным изучением отдельных предметов № 94».

Респондент отмечает один или несколько выбранных вариантов ответа на представленный вопрос.

Вопросы анкеты.

1. В каких классах Вы преподаете:

а) 5-6 классы, б) 7-9 классы, в) 10-11 классы?

2. Какие из представленных методов научного познания Вы используете в учебном процессе:

а) аналогия, б) обобщение, в) оба, г) ни один?

3. На каких уроках Вы чаще всего используете аналогию:

а) математика, б) алгебра, в) геометрия?

4. В каком случае на уроке Вы используете метод аналогии:

а) при введении понятия;

б) для доказательства теоремы;

в) при решении задачи.

5. Используете ли Вы в учебном процессе «задачи-аналоги»:

а) при фронтальной работе с классом;

б) в качестве самостоятельной работы;

в) составляем их вместе с учениками;

г) нет, не использую.

6. На каких уроках Вы чаще всего используете обобщение:

а) математика, б) алгебра, в) геометрия?

7. В каком случае на уроке Вы используете метод обобщения:

а) при введении понятия;

б) для доказательства теоремы;

в) при решении задачи.

8. Укажите ошибки учащихся, связанные с применением метода аналогии и обобщения:

а) проведена неверная аналогия;

б) бездумное решение однотипной задачи;

в) составлено неверное обобщение.

Результаты проведенного анкетирования педагогов по математике представлены на рис. 16.

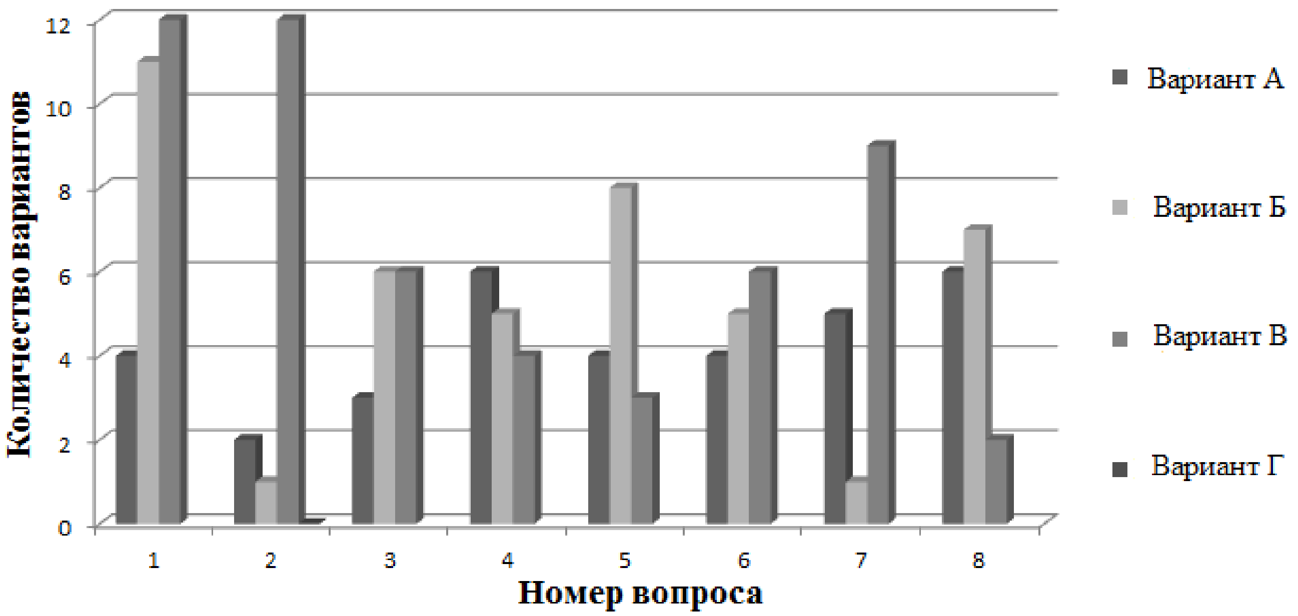

Рис. 16.

На основе данных, представленных в диаграмме, были сделаны следующие выводы:

1) большинство опрошенных педагогов работает в 10-11 классах;

2) в учебном процессе учителя используют оба данных метода научного познания;

3) в равной степени проводится аналогия на уроках алгебры и геометрии;

4) в большинстве случаев метод аналогии применяется при введении понятия, а в меньшей – при решении задач;

5) «задачи-аналоги» в основном применяются при составлении самостоятельных работ;

6) обобщение используется на уроках геометрии в большей степени;

7) метод обобщения применяется при решении задач чаще, чем в остальных случаях;

8) Большинство ошибок, которые совершают учащиеся, применяя методы аналогии и обобщения, связаны с бездумным решением однотипных задач.

6.3. Рекомендации для учителей по внедрению систем задач в процесс обучения математики

На основе проведенного анализа учебников и учебных пособий по алгебре и геометрии, практического опыта учителей и данных анкетирования можно составить рекомендации по внедрению систем задач по темам: «Числовая последовательность» (IX класс); «Параллельность плоскостей» (X класс); «Объемы многогранников» (XI класс) на основе выделенных требований. Следует заметить, что в проанализированных учебниках подобных систем на заданные темы не обнаружилось.

1. Каждую из представленных систем задач можно использовать наряду с основным учебником в качестве дополнительного задачного материала.

2. Блоки в каждой системе выстроены таким образом, что их можно давать на уроках в качестве самостоятельных работ.

3. При изучении темы «Числовые последовательности», чтобы повысить эффективность, нужно показать учащимся, что в данном случае используется метод обобщения.

4. В X классе ученикам для лучшего усваивания темы «Параллельность плоскостей» нужно провести аналогию с понятиями, связанными с параллельностью прямых на плоскости, актуализировав тем самым их знания из планиметрии.

5. С помощью системы задач на тему «Объемы многогранников» учащиеся смогут самостоятельно вывести несколько формул, которые могут понадобиться в дальнейшем в процессе обучения геометрии.

§7. Программа элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» для учащихся математического профиля

7.1. Пояснительная записка

Программа элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» предназначена для учащихся 10-11 математических классов.

Она направлена на углубление учащихся в понятие задачи, способов ее решения, нахождение в задачах учебника взаимно-обратных и составление по уже готовым заданиям своих собственных обратных задач. Для её реализации достаточно знаний и умений по математике, полученных в основной школе.

Актуальность предлагаемой программы определяется тем, что она нацелена на углубление знаний учеников по теме «Взаимно-обратные задачи», ведь построение обратной задачи из курса математики для старших классов, в связи с подготовкой к ЕГЭ и пересмотров приоритетов, постепенно стало убираться, и многие ученики не представляют, что это такое.

Педагогическая целесообразность предлагаемой программы объясняется следующими мотивами:

- поддержка любознательных учеников;
- углубление знаний по математике;
- ознакомление с исследовательской деятельностью.

Цель и задачи программы элективного курса:

- углубление в понятие «взаимно-обратные задачи»;
- формирование у учащихся представлений об особенностях исследовательской деятельности;
- формирование у учащихся умения составлять обратные задачи к данным;
- развитие мыслительных, творческих способностей учащихся.

Отличительная особенность данного элективного курса заключается в том, что решение выделенных в программе задач станет дополнительным фактором формирования положительной мотивации в изучении математики, осознании положения об универсальности математических знаний.

Новизна программы состоит в том, что она углубляет учащихся в понятие «взаимно-обратные задачи», которое раньше изучалось только в начальной школе. Содержание материала, представленного в программе, ранее нигде в курсе математики средней школы не изучалось.

Программа элективного курса рассчитана на 34 (1 ч. в неделю).

Форма занятия: аудиторные: учебное занятие, защита проекта.

Ожидаемые результаты и способы определения их результативности

В результате изучения программы данного элективного курса учащиеся должны:

- знать понятие задачи и способы ее решения;
- уметь определять взаимно-обратные задачи в тексте учебника;
- уметь составлять обратную задачу по данному заданию;
- уметь исследовать научную литературу, выделять необходимый материал.

Основными формами проведения итогов реализации данной образовательной программы являются следующие:

- самостоятельная работа;
- защита проектов.

Данная программа может быть использована только в классах с углубленным или профильным изучением математики.

7.2. Учебно-тематическое планирование

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
I	ПОНЯТИЕ ЗАДАЧИ, ВИДЫ ЗАДАЧ И ОБЩИЕ ДЕЙСТВИЯ ПО ИХ РЕШЕНИЮ	9	
1	Вводное занятие	1	Урок-лекция. Уроки-практикумы. Урок обобщения
2	Понятие задачи. Классификация задач	3	
3	Как решать задачи	3	
4	Получение схемы процесса решения задач	1	
5	Самостоятельная работа № 1	1	Урок самостоятельного решения задач.

№	Содержание темы	Кол-во часов	Виды занятий
II	ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ	25	
1	Тригонометрические функции числового аргумента	4	Урок-лекция. Уроки-практикумы. Урок обобщения
2	Степень с рациональным показателем	3	
3	Радианная мера угла	2	
4	Непрерывность функций	3	
5	Предел функции	4	
6	Производная и первообразная	4	
7	Самостоятельная работа № 2	1	Урок самостоятельного решения задач.
8	Защита проектов	4	Учебно-исследовательская конференция

7.3. Содержание элективного курса

Раздел 1. ПОНЯТИЕ ЗАДАЧИ, ВИДЫ ЗАДАЧ И ОБЩИЕ ДЕЙСТВИЯ ПО ИХ РЕШЕНИЮ (9 ч)

1.1. Вводное занятие. Понятие задачи. Классификация задач. Как решать задачи. Получение схемы процесса решения задач.

Основная цель - познакомить учащихся с понятием задачи, ее видами, получить процесс решения задач.

Понятие задачи, несмотря на небрежное к нему отношение, относится к фундаментальным понятиям в математике. Многие ученики с трудом понимают, как, и какого вида, задачу необходимо решать.

В данном разделе учащиеся знакомятся с несколькими трактовками понятия задачи, ее видами и совместно с учителем составляют схему решения задач.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны знать, что называют задачей, различать ее виды, уметь пользоваться схемой процесса решения задач.

Раздел 2. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОБЩИХ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ ПРИ РЕШЕНИИ ВЗАИМНО-ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ (25 ч.)

2.1. Тригонометрические функции числового аргумента. Степень с рациональным показателем. Радианная мера угла. Непрерывность функций. Предел функции. Производная и первообразная.

Основная цель – научиться находить среди задач предложенной темы взаимно-обратные задачи, составлять обратные задачи по данным.

В данном разделе учащиеся научатся по предложенным темам находить взаимно-обратные задачи и составлять свои. Например, при изучении темы «Радианная мера угла» взаимно-обратными являются задачи вида: перевести из градусной меры угла в радианную, и, наоборот, по радианной мере угла определить его градусную меру. Тема «Производная и первообразная» - По заданной функции найти ее производную и по заданной производной найти исходную функцию. Представленные темы взяты из курса алгебры и начал математического анализа, так как в курсе геометрии можно встретить обратные и взаимно-обратные теоремы. Учащимся значительно интереснее и полезнее будет работать с теми темами, которые для них с данной стороны будут новы.

В результате изучения данного раздела учащиеся должны уметь находить среди задач предложенной темы взаимно-обратные задачи, составлять обратные задачи по данным.

7.4. Примеры заданий для самостоятельных работ

Ниже представлен текст самостоятельных работ к каждому блоку данного элективного курса. Обе работы выполняются с помощью рекомендуемой литературы [32, 33, 41, 42, 54], а учащихся можно разбить на группы по 2-3 человека.

Самостоятельная работа №1.

1. Кто автор данной фразы: «Решение задачи осуществляется только с помощью мышления и никак иначе не осуществимо»:

а) А.В. Брушлинский; б) Дж. Пойа; в) М.А. Данилов.

2. С чем отождествляется понятие задачи?

3. Запишите понятие задачи Л.М. Фридмана.

4. Каковы составные части задачи по Фридману?

5. Выпишите наиболее распространенные типы задач по Л.М. Фридману.

6. Запишите схему процесса решения задачи на конкретном примере, взятом из учебника.

Рекомендуемая литература:

1. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. Ч. 1. – М.: Просвещение, 1977. – 111 с.

2. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. Ч. 2. – М.: Просвещение, 1977. – 146 с.

3. Пойа, Дж. Как решать задачу. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. – 207 с.

4. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

Самостоятельная работа №2.

Решите данные задания, а затем составьте обратные им задачи:

1. Представьте в виде степени или произведения степеней с дробными показателями:

1) $\sqrt[3]{x}$; 4) $\sqrt[6]{b^5}$; 7) $\sqrt[7]{\frac{a^5}{2b^4}}$; 10) $\sqrt{-a^3}$;

2) $\sqrt[4]{y}$; 5) $\sqrt[7]{a^2b^3}$; 8) $\sqrt[7]{\frac{3c^8}{x^5}}$; 11) $\sqrt[6]{-\frac{a^3}{2b^4}}$;

3) $\sqrt[5]{a^3}$; 6) $\sqrt[3]{bc^2}$; 9) $\sqrt[6]{-y^5}$; 12) $\sqrt[4]{-\frac{3c^2}{d^3}}$.

2. Переведите угол из градусной меры в радианную:

1) 0°; 3) 20°; 5) 125°; 7) -225°;

2) 1°; 4) 45°; 6) 185°; 8) -375°.

3. Найдите область определения и точки разрыва функции:

а) $y = \frac{2x+6}{x^2-9}$; б) $y = \frac{x^2}{x^3-2x^2-8x}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - x + {}$ $+3$, проходящей через точку:

а) A(-1;6); б) D(0;3).

5. Найдите производную функции:

а) $y = 4\sin x - \cos x$; д) $y = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$;

б) $y = \cos(2x-4)$; е) $y = 2\mathrm{arctg}\frac{3}{x}$;

в) $y = \cos x \sin x$; ж) $y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

г) $y = \mathrm{tg}x^3$; з) $y = 2\mathrm{arcctg}\frac{\ln x}{x}$.

Рекомендуемая литература:

1.Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 253 с.

7.5. Список рекомендуемой для учителя литературы

Список методических пособий и учебников [6, 32, 33, 41, 42, 54], статей [24, 37] рекомендован для проведения данного элективного курса, так как при его разработке материал брался непосредственно из данных источников и подходит больше всего.

1. Алгебра и математический анализ. 11 кл.: Учеб. пособие для шк. и кл. с углуб. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мускатов, С.И. Шварцбурд. – 11-е изд., стереотип. – М. : Мнемозина, 2004. – 288 с.

2. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике : В 2 ч. Ч. 1. – М. : Просвещение, 1977. – 111 с.

3. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике : В 2 ч. Ч. 2. – М. : Просвещение, 1977. – 146 с.

4. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2013. – 318 с.

5. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2013. – 253 с.

6. Пойа, Дж. Как решать задачу. – М. : Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. – 207 с.

Список статей по журналу «Квант»

1. Груднев Я.И. Поиск решения задачи // Квант. – 1973. № 12. – С. 39-43.

2. Кушнир И. Неожиданность обратной задачи // Квант. – 1991.№2. – С. 38-42.

7.6. Список рекомендуемой для учащихся литературы

Представленный список литературы рекомендован учащимся при проведении элективного курса, так как проанализировав учебники, соответствующие требованиям ФГОС среднего (полного) общего образования, пришли к выводу, что в данных учебниках [6, 20, 41, 42, 69] и статьях [11, 12, 15, 26, 28, 30, 71, 78] в большей мере представлены задачи типа «взаимно-обратные».

1. Алгебра и математический анализ. 11 кл.: Учеб. пособие для шк. и кл. с углуб. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мускатов, С.И. Шварцбурд. – 11-е изд., сиереотип. – М. : Мнемозина, 2004. – 288 с.

2. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

3. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углубленный уровень : задачник / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 255 с.

4. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2013. – 318 с.

5. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс. : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М. : Дрофа, 2013. – 253 с.

6. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с.

Список статей по журналу «Квант»

1. Болтянский В. Три точки на одной прямой // Квант. – 1978.№ 10. – С.14-19.

2. Болтянский В. Квадратное уравнение // Квант. – 1992. №6. – С.44-47.

3. Вавилов В., Мельников И. Касательная // Квант. – 1978. №5. – С.17-21.

4. Гутенмахер Б. Расстояние от точки до плоскости // Квант. – 1977. №3. – С.38-39

5. Депман И. Совершенные числа // Квант. – 1991. №5. – С.1-6.

6. Земляков А. Четные и нечетные функции // Квант. – 1977. №4. – С.38-41.

7. Суконник Я., Горнштейн П. Задачи на площади и двугранные углы // Квант. – 1977. №12. – С. 48-51.

8.Шарыгин И. Откуда берутся задачи? // Квант. – 1991. №8. С.42-48.

7.7. Тематика исследовательской работы учащихся

Предлагаемые ниже темы исследовательских работ могут быть использованы учащимися при выполнении индивидуальных или групповых проектов или в качестве индивидуальных научно-исследовательских работ.

Темы выдаются в начале изучения программы. Защита проектов или работ проходит в рамках учебно-исследовательской конференции. Лучшие работы отбираются на школьную или городскую научную конференцию учащихся.

1. Три точки на одной прямой.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Болтянский В. Три точки на одной прямой // Квант. – 1978.№ 10. – С.14-19.

2. Квадратное уравнение.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Болтянский В. Квадратное уравнение // Квант. – 1992. №6. – С.44-47.

3. Касательная.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Вавилов В., Мельников И. Касательная // Квант. – 1978. №5. – С.17-21.

4. Расстояние от точки до плоскости.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Гутенмахер Б. Расстояние от точки до плоскости // Квант. – 1977. №3. – С.38-39

5. Совершенные числа.

План работы:

1. Разобраться с понятием совершенных чисел и отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Депман И. Совершенные числа // Квант. – 1991. №5. – С.1-6.

6. Четные и нечетные функции.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Земляков А. Четные и нечетные функции // Квант. – 1977. №4. – С.38-41.

7. Задачи на площади и двугранные углы.

План работы:

1. Отобрать взаимно-обратные задачи из учебников и статьи «Кванта».

2. Составить обратные задачи по данным из учебников и статьи «Кванта».

3. Решить полученные задачи.

Рекомендуемая литература:

1. Суконник Я., Горнштейн П. Задачи на площади и двугранные углы // Квант. – 1977. №12. – С. 48-51.

Таким образом, пройдя данный курс, учащиеся: будут знать, что называют задачей, различать ее виды, уметь пользоваться схемой процесса решения задач; выработают навык нахождения среди задач предложенной темы взаимно-обратные задачи, составлять обратные задачи по данным; научатся исследовать научную литературу, выделять необходимый материал.

Выводы по второй главе

При изучении методических основ методов аналогии и обобщения при обучении решению задач в курсе математики старших классов были сделаны следующие выводы:

1) представлена система задач на применение метода обобщения при изучении темы «Числовые последовательности» (IX класс) в курсе алгебры с методическими рекомендациями по их введению в процесс обучения;

2) составлены системы задач на применение методов аналогии и обобщения при изучении тем «Параллельность плоскостей» (X класс) и «Объемы многогранников» (XI класс) в курсе геометрии с методическими рекомендациями по их введению в процесс обучения;

3) в систему задач необходимо включать такие задачи, которые будут направлены на развитие мышления, на обоснование совершаемых операций, на самостоятельное составление условия задачи (параллельно с решением готовой), на повышение культуры вычислений;

4) в систему задач в целях развития мышления следует включать задачи на самостоятельный вывод формул, возвращать учащихся к сделанным обобщениям и к основным положениям для получения того или иного вывода.

5) разработан элективный курс «Взаимно-обратные задачи по математике» и его методическое обеспечение (программа и 2 блоков, содержащих теоретический и практический материал по решению взаимно-обратных задач по алгебре и геометрии).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе теоретического исследования темы «Методы аналогии и обобщения при обучении решению задач в курсе математики общеобразовательной школы» в соответствии с целью и задачами были получены основные выводы и результаты.

1. Метод аналогии основывается на рассмотрении вспомогательной задачи, которая либо дается учителем, либо учащийся сам вспоминает аналогичное задание, с последующим решением основной задачи.

2. Применение метода обобщения (перенос, использование задачи-подсказки) зависит от работы, проведенной учащимися в процессе анализа условия основной задачи.

3. Широкое применение методов аналогии и обобщения при решении задач дает возможность более легкого и прочного усвоения школьниками учебного материала, так как часто обеспечивает мысленный перенос определенной системе знаний и умений от известного объекта к неизвестному, что способствует также и актуализации знаний.

4. Методы аналогии и обобщения являются одними из самых распространенных методов исследования, но, несмотря на это, анализ учебников алгебры и геометрии [1-5, 18, 20, 40-42, 57, 63, 69] показал, что в школьном курсе математики при введении новых понятий, доказательств теорем и решении задач данные методы используются редко.

5. Используя метод обобщения при решении различных задач из курса алгебры и геометрии, выявляются различные обобщения, которые в дальнейшем могут использоваться в процессе обучения математики.

6. Простое применение метода аналогии дает упражнение, подобное исходному. От него следует отличать составление задачи методом обобщения, когда новая задача оказывается в том или ином отношении сложнее исходной.

7. Выделены основные принципы, которые должны выполняться при составлении системы задач.

8. Система задач не должна строиться на всех принципах сразу, но выполнение нескольких из них обязательно по мере возможности.

9. В систему задач в целях развития мышления следует включать задачи на самостоятельный вывод формул, возвращать учащихся к сделанным обобщениям и к основным положениям для получения того или иного вывода.

10. В подборе задач необходимо соблюдать не только постепенное усложнение, но и подчеркивать принципиальное разнообразие вариантов.

11. Разработана система задач на применение метода аналогии при изучении темы «Параллельность плоскостей» (X класс).

12. Разработаны системы задач на применение метода обобщения при изучении тем «Числовая последовательность» (IX класс) и «Объемы многогранников» (XI класс).

13. Проведено анкетирование учителей математики, предназначенное для выявления случаев применения методов аналогии и обобщения на уроках математики.

14. Разработано содержание элективного курса «Взаимно-обратные задачи по математике» для учащихся старших классов.

Представленные системы задач и программа элективного курса позволяют эффективно использовать методы аналогии и обобщения в процессе обучения математики, способствуют целостному восприятию учебного предмета, помогают актуализировать знания по предмету. Разработанные системы задач и элективный курс в дальнейшем могут применяться в практической деятельности и помочь учащимся достичь более высоких результатов в обучении математики.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что поставленные задачи решены, а цель магистерской диссертации достигнута.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра. 9 кл.: учебник / Г.К. Муравин, К.С. Муравин, О.В. Муравина. – 14-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 315с.

2. Алгебра. 9 класс: В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович, Т.М. Мишустина, Е.Е. Тульчинская ; под ред. А.Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. – М. : Мнемозина, 2010. – 223 с.

3. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова ; под ред. С.А. Теляковского. – 21-е изд. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.

4. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / [А.Г. Мордкович и др.] ; под ред. А.Г. Мордковича. – 10-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 239 с.

5. Алгебра и начала математического анализа : учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / [А.Н. Колмогоров, А.М. Абрамов, Ю.П. Дудницын и др.] ; под ред. А.Н. Колмогорова. – 17-е изд. – М.: Просвещение, 2008. – 384 с.

6. Алгебра и математический анализ. 11 кл.: Учеб. пособие для шк. и кл. с углуб. изуч. математики / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мускатов, С.И. Шварцбурд. – 11-е изд., сиереотип. – М. : Мнемозина, 2004. – 288 с.

7. Алгебра. Поурочные планы для 10 класса / Сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина. – Волгоград : Учитель, 1998. – 153 с.

8. Александрова, Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. – 3-е изд., испр. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – 248 с.

9. Арюткина С.В. О сущности обобщения математической задачи [*Электронный ресурс*] //Современные проблемы науки и образования. -2014, № 4.- С.23. *Режим доступа к журн.*: http://elibrary.ru

10. Бабенко, Ю.И. Степенные соотношения в окружности // Математика в школе. – 1993. - №6. – С.65-66.

11. Болтянский В. Три точки на одной прямой // Квант. – 1978.№ 10. – С.14-19.

12. Болтянский В. Квадратное уравнение // Квант. – 1992. №6. – С.44-47.

13. Быкова, Д.С. Задачи на применение метода аналогии при изучении темы «Параллельность плоскостей» в общеобразовательной школе // Геометрия и геометрическое образование: сборник трудов III Международной научной конференции «Геометрия и геометрическое образование в современной средней и высшей школе» (к 75-летию Е.В. Потоскуева), Тольятти, 27-29 ноября 2014 года. – С.146-148.

14. Быкова, Д.С. Методика обучения решению задач в курсе математики общеобразовательной школы на основе аналогии и обобщения // Математика и математическое образование: сборник трудов VII Международной научной конференции «Математика. Образование. Культура», Тольятти, 27-29 апреля 2015 года. – С.269-272.

15. Вавилов В., Мельников И. Касательная // Квант. – 1978. №5. – С.17-21.

16. Большая советская энциклопедия : В 30 т. / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М. : Советская энциклопедия, 1969.

17. Веретенникова О.Н. Обучение школьников решению конструктивных задач сферической геометрии с помощью формирования обобщенного приема [*Электронный ресурс*] //Сибирский педагогический журнал. -2011, № 8.- С.149-155. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

18. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – 20-е изд. – М. : Просвещение, 2010. – 384 с.

19. Геометрия. 10 класс: поурочные планы по учебнику А.В. Погорелова / авт.-сост. Т.Л. Афанасьева, Т.И. Купорова. – Волгоград: Учитель,1998.–108 с.

20. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина. – 18-е изд. – М. : Просвещение, 2009. – 255 с.

21. Геометрия. 11 класс: поурочные планы по учебнику А.В. Погорелова / авт.-сост. Т.Л. Афанасьева, Л.А. Тапилина. – Волгоград: Учитель,1999. – 96 с.

22. Гомонов, С.А. Замечательные неравенства: способы получения и примеры применения: 10-11 кл. учебное пособие / С.А. Гомонов. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2006. – 254 с.

23. Горбачева, Н.В. Метод аналогии как средство развития творческого мышления учащихся при обучении их элементам сферической геометрии: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Горбачева Наталья Владимировна. – М., 2001. – 213 с.

24. Груднев Я.И. Поиск решения задачи // Квант. – 1973. № 12. – С. 39-43.

25. Груденов, Я.И. Совершенствование методики работы учителя математики. – М. : Просвещение, 1990. – 224 с.

26. Гутенмахер Б. Расстояние от точки до плоскости // Квант. – 1977. №3. – С.38-39

27. Давыдов, В.В. Виды обобщений в обучении. – М. : Просвещение, 1972. – 262 с.

28. Депман И. Совершенные числа // Квант. – 1991. №5. – С.1-6.

29. Егоров, С.Н. Аналог теоремы Пифагора в стереометрии / С.Н. Егоров, В.И. Копылов, С.С. Петрова // Математика в школе. – 2000. - №4. – С. 72-73.

30. Земляков А. Четные и нечетные функции // Квант. – 1977. №4. – С.38-41.

31. Кара-сал Н.М., Бичи-оол Е.К. Формирование методических умений у будущего учителя математики [*Электронный ресурс*] //Вестник Тувинского государственного университета. №4 Педагогические науки. -2010, № 4.-С.27-35. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

32. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике: В 2 ч. Ч. 1. – М.: Просвещение, 1977. – 111 с.

33. Колягин, Ю.М. Задачи в обучении математике : В 2 ч. Ч. 2. – М. : Просвещение, 1977. – 146 с.

34. Костюченко Р.Ю., Юдина Н.А. Обучение учащихся аналогии в процессе решения геометрических задач [*Электронный ресурс*] //Современные проблемы науки и образования. -2011, № 6.- С.176. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

35. Кочагин, В.В. Методические особенности применения аналогии в систематическом курсе стереометрии: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Кочагин Вадим Витальевич. – М., 1999. – 153 с.

36. Кочагин, В.В. Список аналогичных геометрических задач // Математика в школе. – 1999. - №1. – С. 69-70.

37. Кушнир И. Неожиданность обратной задачи // Квант. – 1991.№2. – С. 38-42.

38. Люберанский, А.И. Изучаем пространственную теорему Пифагора // Математика в школе. – 2000. - №8. – С. 74-75.

39. Майкова Н.С. Виды ошибок учащихся при обучении решению геометрических задач, их причины и способы предупреждения [*Электронный ресурс*] //Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. -2008, № 73-2.- С.113-118. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

40. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубленный уровень) / Н.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбурд. – 18-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2014. – 352 с.

41. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 318 с.

42. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 11 класс.: учебник /Г.К. Муравин, О.В. Муравина. – М.: Дрофа, 2013. – 253 с.
43. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 кл. Углубленный уровень : задачник / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 255 с.
44. Математика в понятиях, определениях и терминах: В 2 ч. Ч. 1: пособие для учителей / Под ред. Л.В. Сабинина. – М. : Просвещение, 1978. – 320 с.
45. Менькова С.В. Математические задачи-аналоги и приемы их составления [*Электронный ресурс*] //Теоретические и прикладные аспекты современной науки. -2014, №3-4.- С.81-84. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru
46. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики. / Б.С. Каплан, Н.К. Рузин, А.А. Столяр ; под ред. А.А. Столяра. – Мн. : Нар. асвета, 1981. – 191с.
47. Методика преподавания математики в восьмилетней школе. / С.А. Гастева, Б.И. Крельштейн, С.Е. Ляпин, М.М. Шидловская ; под ред. С.Е. Ляпина. – М. : Просвещение, 1965. – 745 с.
48. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / В.А. Оганесян, Ю.М. Колягин, Г.Л. Луканкин, В.Я. Саннинский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Просвещение, 1980. – 368с.
49. Михайлов, И. И. Обращенные квадраты // Математика в школе. – 1985. - №5. – С. 71.
50. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010. – 239 с.
51. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (профильный уровень): методическое пособие для учителя / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 2-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2010. – 191 с.

52. Павлова Е.С.,Никитина М.Г. Формирование творческого подхода к математическому материалу у школьников и студентов [*Электронный ресурс*] //Балтийский гуманитарный журнал. -2015, № 1.- С.133-135. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

53. Паповский, В.М. Углубленное изучение геометрии в 10-11 классах: метод. рекомендации к преподаванию курса геометрии в 10-11 кл. по учеб. пособию А.Д. Александрова, А.Л. Вернера, В.И. Рыжика: кн. для учителя.– М. : Просвещение, 1993. – 223 с.

54. Пойа, Дж. Как решать задачу. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. – 207 с.

55. Пойа, Дж. Математика и правдоподобные рассуждения. – М. : Наука, 1975. – 464 с.

56. Пойа, Дж. Математическое открытие. – М. : Наука, 1970. – 456 с.

57. Погорелов, А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. общеобразоват. учреждений. – 5-е изд. – М. : Просвещение, 1995. – 383 с.

58. Попов Н.И., Марасанов А.Н. Использование специальной методики при обучении решению математических задач [*Электронный ресурс*] //Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. -2014, № 1.- С.86-89. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

59. Потоскуев, Е.В. Геометрия 10 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 10 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич, Л.Я. Шляпочник. – М. : Дрофа, 2004. – 224 с.

60. Потоскуев, Е.В. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углуб. и профильным изучением математики / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2004. – 240 с.

61. Потоскуев, Е.В. Геометрия 11 кл.: Методическое пособие к учебнику Е.В. Потоскуева, Л.И. Звавича «Геометрия. 11 класс» / Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – М. : Дрофа, 2005. – 220 с.

62. Поурочные разработки по геометрии: 11 класс / Сост. В.А. Яровенко. – М.: ВАКО, 2010. – 336 с.
63. Прасолов, В.В. Задачи по стереометрии / В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 288 с.
64. Программы для общеобразоват. школ, гимназий, лицеев: Математика. 5-11 кл. / Сост. Г.М. Кузнецова, Н.Г. Миндюк. – 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2002. – 320 с.
65. Рурукин, А.Н. Поурочные разработки по алгебре и началам анализа. 11 класс. - М. : ВАКО, 2009. - 336 с.
66. Саброва А.С. Физико-математические науки роль методов научного познания в изучении математики [*Электронный ресурс*] //Science time. -2016, № 1.- С.437-445. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru
67. Семушина Л.Б. Аналогия как метапредметная деятельность в процессе обучения математике [*Электронный ресурс*] //Пермский педагогический журнал. -2013, № 4.- С.66-69. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru
68. Смирнова, И. Методические указания по геометрии 7-11 классов // Математика. – 2000. - №36. – С. 10-15.
69. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М. : Мнемозина, 2008. – 288 с.
70. Сойер, У.У. Прелюдия к математике / Пер. с англ. М. Л. Смолского и С.Л. Романовой. - 2-е изд. – М. : Просвещение, 1972. – 193 с.
71. Суконник Я., Горнштейн П. Задачи на площади и двугранные углы // Квант. – 1977. №12. – С. 48-51.
72. Таранова М.В. Роль и место исследовательской деятельности учащихся в процессе освоения ими методов математики [*Электронный ресурс*] //Современные проблемы науки и образования. -2014, № 6.- С.753. *Режим доступа к журн.:* http://elibrary.ru

73. Уемов, А.И. Аналогия в практике научного исследования. – М : Наука, 1970. – 264 с.
74. Ульянова, И.В. Обучение школьников методам решения геометрических задач в контексте укрупнения дидактических единиц: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Ульянова Ирина Валентиновна. – М., 2002. – 182 с.
75. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования в редакции Приказа Минобрнауки России от 29 декабря 2014 г. № 1645. *Режим доступа:* http://pravo.gov.ru
76. Шабунин, М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа: методическое пособие для 10 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 448 с.
77. Шабунин, М.И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа: методическое пособие для 11 класса / М.И. Шабунин, А.А. Прокофьев, Т.А. Олейник, Т.В. Соколова. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. – 360 с.
78.Шарыгин И. Откуда берутся задачи? // Квант. – 1991. №8. С.42-48.
79. Шибасов, Л.П. От единицы до бесконечности / Л.П. Шибасов. – 3-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2006. – 206 с.
80. Эмпахер, А. Сила аналогии. – М. : Мир, 1965. – 155 с.
81. Эрдниев, П.М. Аналогия в математике. – М.: Знание, 1970. – 30 с.
82. Эрдниев, П.М. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя / П.М. Эрдниев, Б.П. Эрдниев. – М. : Просвещение, 1986. – 255 с.
83. Юдина, Н.А. Методика обучения учащихся аналогии на заключительном этапе решения планиметрических задач: автореферат дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Юдина Наталья Алексеевна. – М., 2011. – 22 с.
84. Яровенко В. А. Поурочные разработки по геометрии: 10 класс. – М.: Просвещение, 2010. – 304 с.